

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# La congettura di Collatz

Tesi di Laurea in Sistemi dinamici

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Mirko Degli Esposti

Presentata da:  
Fabrizio Chimienti

Seconda Sessione  
Anno Accademico 2012/2013



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>1 Analisi del grafo di Collatz</b>	<b>11</b>
1.1 Grafi orientati e sistemi dinamici su $\mathbb{N}$	11
1.2 La misura di un sottoinsieme di $\mathbb{N}$	16
1.3 Codifica dei predecessori mediante i vettori ammissibili	17
1.3.1 Codificare un cammino nel grafo di Collatz	17
1.3.2 La concatenazione di vettori interi	18
1.3.3 Ripercorrendo i vettori interi nei razionali	21
1.3.4 I vettori interi ammissibili	23
1.4 Proprietà dei vettori ammissibili	27
1.4.1 Riconoscere i vettori ammissibili	27
1.4.2 Estensione dei vettori ammissibili	28
1.4.3 I vettori interi simili	31
1.4.4 Schemi ricorrenti nel grafo di Collatz	32
1.5 Funzioni di conteggio e una stima	35
1.5.1 Funzione di conteggio per i vettori ammissibili	36
1.5.2 Il conteggio dei predecessori di una lunghezza data	39
1.5.3 L'errore della stima	42
1.6 Alcune limitazioni agli insiemi dei predecessori	44

1.6.1	I predecessori dispari . . . . .	44
1.6.2	Il grafo di Collatz ridotto . . . . .	46
1.6.3	Funzioni di conteggio ridotte . . . . .	47
1.6.4	Costruzione induttiva delle funzioni di conteggio ridotte	49
1.6.5	I predecessori dispari nel grafo di Collatz ridotto . . . .	50
1.7	Il miglior approccio . . . . .	52
1.7.1	Limiti uniformi . . . . .	52
1.7.2	I vettori minoranti di Applegate e Lagarias . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Sulla (non)-esistenza degli <math>m</math>-cicli nel grafo di Collatz</b>	<b>59</b>
2.1	Il lemma di Crandall . . . . .	60
2.2	Risultati famosi sull'inesistenza di cicli . . . . .	61
2.3	Limite superiore e inferiore . . . . .	63
2.4	Condizioni di esistenza di un $m$ -ciclo . . . . .	65
2.4.1	La catena di equazioni . . . . .	65
2.4.2	Soluzioni intere e razionali . . . . .	65
2.5	Condizioni su $K$ e $m$ da una forma lineare di logaritmi . . . .	67
2.5.1	Introduzione a $\Lambda$ . . . . .	67
2.5.2	Una prima disuguaglianza per $\Lambda$ . . . . .	67
2.5.3	Concatenamento . . . . .	68
2.5.4	Un'altra disuguaglianza per $\Lambda$ . . . . .	69
2.6	Condizioni su $K$ e $m$ dalle frazioni continue . . . . .	70
2.6.1	Un utile lemma . . . . .	70
2.6.2	Risultati sulle frazioni continue . . . . .	70
2.6.3	Una generalizzazione del lemma di Crandall per gli $m$ -cicli . . . . .	71
2.7	Applicazione della teoria della trascendenza . . . . .	72
2.8	Limiti superiori per $K, L$ e $x_{min}$ . . . . .	73
2.8.1	Limite iniziale superiore . . . . .	73
2.8.2	Limiti superiori ridotti . . . . .	75

---

2.9	Eliminazione delle soluzioni piccole . . . . .	79
2.9.1	Convergenze . . . . .	79
2.9.2	Reticoli . . . . .	80
2.10	Conclusioni . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Generalizzazioni al problema di Collatz</b>	<b>83</b>
3.1	Il caso banale $a = b = 1$ . . . . .	84
3.1.1	Osservazioni generali sui numeri dispari ciclici . . . . .	86
3.2	Seconda generalizzazione . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Il teorema di Terras</b>	<b>89</b>
<b>A</b>		<b>97</b>
A.1	Osservazioni sulla formula 3 . . . . .	97
A.2	Dimostrazione lemma di Crandall . . . . .	99
A.3	Una 'fattorizzazione' dovuta all'algoritmo di Collatz . . . . .	104
A.4	Test empirici sulle iterazioni dell'algoritmo . . . . .	106
A.5	Com'è fatto un ciclo positivo diverso da quello banale . . . . .	109
	<b>Bibliografia</b>	<b>115</b>



# Introduzione

Uno tra i più famosi problemi di matematica elementare, che rimane tutt'ora irrisolto è la congettura di Collatz (dal matematico Lothar Collatz), la quale riguarda la seguente funzione:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ pari} \\ 3n + 1, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad (1)$$

Dove consideriamo  $\mathbb{N}$  come l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , mentre useremo  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Definiamo ora la congettura di Collatz la quale afferma che:

**Congettura 0.0.1 (Congettura di Collatz).** *Per ogni numero naturale  $n$ , esiste un punto  $k$  –esimo della successione  $\{n, f(n), f^2(n), \dots\}$  tale che  $f^k(n) = 1$ .*

Introduciamo il problema osservando che: se  $n$  è dispari, allora  $f(n) = 3n + 1$  è pari, allora si ha sempre  $f^2(n) = \frac{3n+1}{2}$ . Per questo motivo si può riscrivere la funzione come:

$$T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad T(n) = \begin{cases} T_0 = n/2, & \text{se } n \text{ pari} \\ T_1(n) = \frac{3n+1}{2}, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad (2)$$

ed otteniamo una congettura equivalente.

Diamo ora una prova euristica, presa dal blog di Terence Tao, del fatto che la congettura ha buone possibilità di essere vera, possiamo osservare che preso un  $n$  qualsiasi, abbiamo una probabilità pari a  $\frac{1}{2}$  che sia pari o dispari, allora  $T$  aumenta  $n$  di un fattore approssimativamente pari a  $\frac{3}{2}$  la metà delle volte o diminuisce di un fattore  $\frac{1}{2}$ . Inoltre se  $n$  è distribuito uniformemente modulo 4, si verifica che  $T(n)$  è uniformemente distribuito modulo 2, così  $T^2(n)$  può essere approssimativamente  $\frac{3}{2} \cdot T(n)$ , la metà delle volte e circa  $\frac{1}{2} \cdot T(n)$  l'altra metà delle volte.

Continuando questo ragionamento a livello euristico, ci aspettiamo che  $T^{k+1}(n) \approx \frac{3}{2}T^k(n)$  la metà delle volte e  $T^{k+1}(n) \approx \frac{T^k(n)}{2}$  l'altra metà delle volte. Il logaritmo di questa orbita, può essere modellizzato euristicamente da una passeggiata aleatoria con passo  $\log(\frac{3}{2})$  e  $\log(\frac{1}{2})$  che si verificano con uguale probabilità. La previsione:

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{3}{4} \right)$$

è negativa, quindi ci aspettiamo che l'orbita diminuisca nel lungo periodo. Questa viene vista come una giustificazione euristica alla congettura 0.0.1, almeno nel caso 'medio', in cui  $n$  è scelto uniformemente a caso, ad esempio, un intervallo molto grande  $\{1, \dots, N\}$ .

Purtroppo l'orbita può essere mantenuta uniformemente distribuita modulo 2 per un tempo approssimativamente pari a  $O(\log(N))$  con  $N$  estremo superiore dell'intervallo considerato, dopo di che il sistema diventa troppo complicato per essere analizzato con metodi diversi da quello euristico.

Inoltre utilizzando un approccio più aritmetico, si può osservare facilmente che preso un numero  $n$  dispari e iterando l'algoritmo si ottiene la seguente formula:

$$\frac{3^t n + 3^{t-1} + 3^{t-2} 2^{d_1} + \dots + 2^{d_1 + \dots + d_{t-2}} 3 + 2^{d_1 + \dots + d_{t-1}}}{2^{d_1 + \dots + d_t}} = c \quad (3)$$



Dove  $t$  sono le iterazioni del tipo  $3n + 1$  e  $d_1 + \dots + d_t$  con  $d_1, \dots, d_t \in \mathbb{N}$ , sono pari al numero di iterazioni del tipo  $\frac{n}{2}$ . Inoltre  $c$  è il numero naturale ottenuto iterando l'algoritmo quindi per la congettura di Collatz dopo un numero finito di iterazioni sarà pari a 1.

Quindi per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , esistono  $t, d_1, \dots, d_t \in \mathbb{N}$  tali che  $c$  sia uguale a 1.

Vediamo ora alcune sottocongetture:

**Congettura 0.0.2 (Congettura dei cicli finiti).** *I numeri ciclici sono un numero finito, cioè il numero di interi  $n > 0$  tali che  $f^k(n) = n$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$  è finito.*

**Congettura 0.0.3 (Congettura delle traiettorie non divergenti).** *Non ci sono  $n \in \mathbb{N}$  tali che:*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(n) = \infty$$

Esistono risultati importanti per entrambe le sottocongetture, ma tutt'ora non esiste una dimostrazione. Esistono diversi approcci alla congettura e alle sottocongetture (teoria della trascendenza, linguaggio formale, equazioni funzionali, ...) noi partiremo inizialmente dall'idea di Collatz per poi utilizzare altri approcci.



# Capitolo 1

## Analisi del grafo di Collatz

### 1.1 Grafi orientati e sistemi dinamici su $\mathbb{N}$

Una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  genera un sistema dinamico su  $\mathbb{N}$ , dato da un  $n \in \mathbb{N}$  e una traiettoria  $(n, f(n), f^2(n), \dots)$  generata iterando l'applicazione  $f$ . Questo è dovuto allo sviluppo esplicito di una idea di Collatz per rappresentare un tale sistema dinamico con un grafo infinito.

Diamo alcune nozioni fondamentali della teoria dei grafi tratte da [Wir]:

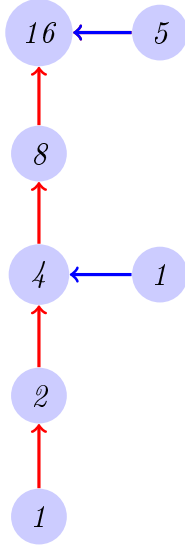
**Definizione 1.1 (Grafo orientato).** Un grafo orientato è una coppia  $\Gamma = (V, E)$  nella quale  $V$  è l'insieme dei vertici e l'insieme  $E \subset V \times V$  quello degli archi orientati.

Un grafo orientato  $\Gamma' = (V', E')$  è chiamato *sottografo* di  $\Gamma$ , se  $V' \subset V$  ed  $E' \subset E \cap (V' \times V')$ .

Un sottografo  $\Gamma' = (V', E')$  di  $\Gamma$  è detto il *sottografo completo di  $\Gamma$  generato da  $V'$* , se  $E' = E \cap (V' \times V')$ .

**Notazione 1.1.1.** *Solitamente un grafo orientato viene disegnato con dei punti che rappresentano i vertici e delle frecce che rappresentano gli archi orientati.*

**Esempio 1.1.2.** Ecco un esempio di grafo di collatz:



Dove le frecce rosse sono del tipo  $x \rightarrow 2x$  e quelle blu sono del tipo  $x \rightarrow 3x + 1$

**Definizione 1.2.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo orientato e siano fissati due vertici  $x, y \in V$ .

- (a) Una successione finita di vertici  $\pi := (v_0, \dots, v_k) \subset V$  è detto cammino (orientato) dal punto  $x$  a  $y$ , se  $v_0 = x$ ,  $v_k = y$  e  $(v_{j-1}, v_j) \in E$  per  $j = 1, \dots, k$ ; in questo caso  $k$  è detta la lunghezza del cammino  $\pi$ ; in simboli  $l(\pi) = k$ ,  $x$  è detto vertice di partenza e simbolicamente scriveremo  $i(\pi) = x$  mentre  $y$  è detto vertice finale e simbolicamente scriveremo  $t(\pi) = y$ . L'insieme di tutti i cammini del grafo  $\Gamma$  è denotato da  $\Pi(\Gamma)$ .
- (b) Un cammino  $\pi$  è detto *cammino tra  $x$  e  $y$* , se  $\pi$  è uno dei due cammini da  $x$  a  $y$  o da  $y$  a  $x$ .
- (c) Un cammino  $(v_0, \dots, v_k)$  è detto ciclo, se  $v_0 = v_k$  e  $v_0 \neq v_j$  per  $j = 1, \dots, k - 1$ .

- (d) Se  $\pi_1 = (v_0, \dots, v_k)$  e  $\pi_2 = (w_0, \dots, w_l)$  sono due cammini di  $\Gamma$  con  $t(\pi_1) = i(\pi_2)$ , cioè  $v_k = w_0$ , allora la loro *concatenazione* è ancora un cammino del tipo  $\pi_1\pi_2 := (v_0, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l)$ .
- (e) Un vertice  $v$  è detto *predecessore* di  $y$  in  $\Gamma$ , se esiste un cammino da  $v$  a  $y$ .
- (f) Un vertice  $t$  è detto *vertice finale* del grafo  $\Gamma$ , se per ogni  $v \in V$ , esiste un cammino da  $v$  a  $t$ .
- (g) La successione  $(v_0, \dots, v_k)$  è detta *cammino non orientato da  $x = v_0$  a  $y = v_k$* , se per  $j = 0, \dots, k-1$ , abbiamo  $(v_j, v_{j+1}) \in E$  o  $(v_{j+1}, v_j) \in E$ .

*Osservazione 1.* Ogni arco  $e \in E$  del grafo  $\Gamma = (V, E)$  è un cammino di lunghezza 1, mentre ogni vertice  $v \in V$  può essere considerato un cammino di lunghezza 0.

Ogni cammino  $\pi = (v_0, \dots, v_k)$  di lunghezza  $k \geq 0$  ha una sola decomposizione  $\pi = e_1 \cdots e_k$  in  $k$  archi  $e_j := (v_{j-1}, v_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

Inoltre la lunghezza agisce additivamente rispetto alla concatenazione di cammini,  $l(\pi_1\pi_2) = l(\pi_1) + l(\pi_2)$  quando  $\pi_1, \pi_2$  sono due cammini la cui concatenazione è ben definita.

Diamo ora alcune definizioni molto importanti per la rappresentazione di sistemi dinamici su insiemi discreti.

**Definizione 1.3.** Sia  $\Gamma = (V, E)$  un grafo orientato e sia  $a \in V$ . Un vertice  $x \in V$  è detto *debolmente unito ad  $a$* , se c'è un cammino non orientato da  $x$  ad  $a$  in  $\Gamma$ .

La *componente debole* di  $\Gamma$  che contiene il vertice  $a$ , è definita come il sottografo completo  $\tilde{\Gamma}(a)$  generato dall'insieme dei vertici  $x \in V$  i quali sono debolmente uniti ad  $a$ . Il grafo  $\Gamma$  è detto *debolmente connesso* se  $\Gamma = \tilde{\Gamma}(a)$ .

Ovviamente la relazione " $x$  è debolmente unito ad  $a$ " è una relazione di equivalenza sull'insieme dei vertici del grafo orientato. Per questo possiamo

decompone  $V$  in coppie di insiemi disgiunti  $V_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , tali che il sottografo completo generato da  $V_\alpha$  sia una componente debole di  $\Gamma$ , per ogni  $\alpha \in A$ .

**Definizione 1.4.** Un grafo orientato  $\Gamma = (V, E)$  è detto *albero orientato*, se  $\Gamma$  è debolmente connesso e  $\Pi(\Gamma)$  non contiene cicli.

**Definizione 1.5 (Grafo di Collatz).** Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una qualsiasi funzione a valori interi. Il *grafo di Collatz*  $\Gamma_f = (V_f, E_f)$  di  $f$  è definito come  $V_f := \mathbb{N}$  l'insieme di vertici e  $E_f := \{(n, f(n)) : n \in \mathbb{N}\}$  come l'insieme degli archi orientati.

Procediamo nella discussione delle relazioni tra sistemi dinamici su  $\mathbb{N}$  e i grafi associati a funzioni a valori interi.

**Definizione 1.6.** Sia data una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e sia  $a \in \mathbb{N}$ . La successione:

$$\mathcal{T}_f(a) := (f^k(a))_{k \geq 0} = \{a, f(a), f \circ f(a), \dots\}$$

delle  $f$ -iterazioni di  $a$  è detta la  $(f-)$ traiettoria di  $a$ . Il numero  $a$  è detto *ciclico* (in  $\Gamma_f$ ), se c'è un intero  $k > 0$  tale che  $f^k(a) = a$ ; altrimenti è detto *non-ciclico*.

L'insieme:

$$P_f(a) := \{n \in \mathbb{N} : a \in \mathcal{T}_f(n)\}$$

è detto l'insieme degli  $(f-)$ predecessori di  $a$ .

*Osservazione 2.* Per un'arbitraria funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ci sono due possibilità per il comportamento al limite di una traiettoria:

- (1)  $\mathcal{T}_f(a)$  è limitata. Allora la traiettoria è eventualmente ciclica, cioè ci sono interi  $k_0, p > 0$  tali che  $f^k(a) = f^{k+p}(a)$  per  $k \geq k_0$ .
- (2)  $\mathcal{T}_f(a)$  non è limitata. Allora  $\mathcal{T}_f(a)$  può visitare ogni sottoinsieme limitato di  $\mathbb{N}$  solo un numero finito di volte. In altre parole: per ogni valore di soglia  $s \in \mathbb{N}$  c'è un intero  $k_s > 0$  tale che  $f^k(a) \geq s$  per  $k \geq k_s$ .

*Osservazione 3.* Dato un sottoinsieme  $S \subset \mathbb{N}$ , sia  $< S >_f$  il sottografo completo di  $\Gamma_f$  generato dall'insieme dei vertici di  $S$ . Allora:

- (1) Se  $a \in V_f$  è non-ciclico, allora  $< P_f(a) >_f$  è un albero orientato con vertice finale  $a$ .
- (2) Se  $a \in V_f$  è ciclico, allora  $< P_f(a) >_f$  è composto da un ciclo, con alberi orientati collegati a ognuno dei suoi vertici.

**Definizione 1.7.** Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{N}$ . Il *dominio di attrazione della traiettoria*  $\mathcal{T}_f(a)$  è definito come:

$$A_f(a) := \bigcup_{n \in \mathcal{T}_f(a)} P_f(n)$$

*Osservazione 4.* Il dominio di attrazione della traiettoria  $\mathcal{T}_f(a)$  può essere scritto come:

$$A_f(a) = \{n \in \mathbb{N} : \text{esistono interi } k, l \geq 0 \text{ con } f^k(n) = f^l(a)\}.$$

Inoltre il sottografo completo di  $\Gamma_f$  generato ponendo  $A_f(a)$  come insieme dei vertici, è semplicemente la componente debole di  $a$  in  $\Gamma_f$ , in simboli  $\tilde{\Gamma}_f(a) = < A_f(a) >_f$ . La struttura del grafo  $(\tilde{\Gamma}_f)(a)$  è legata al comportamento al limite di  $\mathcal{T}_f(a)$  nei seguenti modi:

- (1) Se  $\mathcal{T}_f(a)$  rimane limitata, allora  $\tilde{\Gamma}_f(a)$  è composto da un ciclo con un albero finito o infinito collegato ad ogni vertice del ciclo e ogni vertice del ciclo è il vertice finale dell'albero ad esso collegato.
- (2) Se  $\mathcal{T}_f(a)$  non è limitata, allora  $\tilde{\Gamma}_f(a)$  è un albero infinito senza vertici finali.

*Osservazione 5.* Ogni componente debole di  $\Gamma_f$  è composta al più da un numero finito di vertici ciclici.

## 1.2 La misura di un sottoinsieme di $\mathbb{N}$

Che tipo di informazioni possiamo cercare, se vogliamo sapere qualcosa su tale sistema dinamico? Più nello specifico informazioni riguardo alla 'misura' dell'insieme dei predecessori  $P_f(a) \subset \mathbb{N}$ , possono essere interessanti. Quello di cui abbiamo bisogno è un buon concetto di misura per i sottoinsiemi di  $\mathbb{N}$ . Tutta l'informazione possibile riguardo a un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  è codificata nelle seguenti funzioni.

**Definizione 1.8.** Sia  $C \subset \mathbb{N}$  un sottoinsieme qualsiasi. La *funzione conteggio* di  $C$  è definita come:

$$Z_C : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad Z_C(x) := |\{y \in C : y \leq x\}|,$$

e la *funzione conteggio pesata* di  $C$  è data da:

$$W_C : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad W_C(x) := \frac{|\{y \in C : y \leq x\}|}{x} = \frac{Z_C(x)}{x}.$$

In questo modo, la misura di un dato sottoinsieme  $C \subset \mathbb{N}$  è codificata nel comportamento asintotico, per  $x$  grande, della sua funzione conteggio  $Z_C$ . Il comportamento asintotico (quando  $x \rightarrow \infty$ ) della funzione conteggio pesata, intuitivamente, rappresenta la probabilità che preso a caso un numero naturale, sia un elemento di  $C$ .

Inoltre possiamo notare che  $f$  può essere riscritta nel seguente modo

**Notazione 1.2.1.**

$$T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad T(n) = \begin{cases} T_0 = \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ e' pari,} \\ T_1(n) = \frac{3n+1}{2} & \text{se } n \text{ e' dispari,} \end{cases}$$

e diciamo che il grafo di Collatz ad essa associato è  $\Gamma_T = (V_T, E_T)$ .

**Corollario 1.2.1.** Per la funzione appena definita, le seguenti affermazioni sono equivalenti:



- (a) Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  c'è un intero  $k \geq 0$  con  $T^k(n) = 1$ .
- (b)  $1 \in \mathcal{T}_T(n)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $A_T(1) = A_T(2) = \mathbb{N}$ .
- (d) La funzione conteggio pesata di  $P_T(1)$  è la costante 1.
- (e) Il grafo di Collatz di  $T$  è debolmente connesso.

## 1.3 Codifica dei predecessori mediante i vettori ammissibili

### 1.3.1 Codificare un cammino nel grafo di Collatz

Supponiamo sia dato un cammino nel grafo di Collatz, cioè una successione finita di numeri naturali  $(v_0, \dots, v_k) = (a, T(a), \dots, T^k(a))$ , oppure

$$v_0 \xrightarrow{T} v_1 \xrightarrow{T} \dots \xrightarrow{T} v_k.$$

Dal fatto che la funzione  $T$  ha due possibilità,  $T_0$  e  $T_1$ , alcune delle mappe  $T(v_{j-1}) = v_j$  sono determinate da  $T_0$ , e altre da  $T_1$ .

Scriviamo uno 0 ogni volta che utilizziamo  $T_0$  e 1 ogni volta che utilizziamo  $T_1$ , in modo tale che un cammino dia origine a uno 0 – 1–vettore, ad esempio  $(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$ . Lo 0 – 1–vettore così ottenuto viene chiamato *vettore codifica* [Ter1] o *vettore di parità'* [Lag1], riferendosi all'infinita *successione di parità'* di Everett.

**Definizione 1.9.** Sia  $\pi = (v_0, \dots, v_k)$  un cammino in  $\Gamma_T$ . Lo 0 – 1–vettore  $(x_1, \dots, x_k)$  definito da  $v_j = T_{x_j}(v_{j-1})$  per  $j = 1, \dots, k$  è detto *vettore di parità'* del cammino  $\pi$ .

Possiamo usare una notazione leggermente più complicata, per i vettori codifica, cioè usare un vettore nel quale sono contati quanti zeri ci sono prima,

dopo o tra gli 1 del vettore codifica. Ad esempio:

$$(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1) \text{ diventa } (2, 1, 0, 0, 0)$$

### 1.3.2 La concatenazione di vettori interi

Formalizziamo meglio la procedura appena illustrata.

**Definizione 1.10.** Indichiamo con  $\mathcal{F}$  l'insieme delle successioni finite di interi non negativi,

$$\mathcal{F} := \{s = (s_0, \dots, s_k) : k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } s_j \in \mathbb{N}_0 \text{ per } j = 0, \dots, k\}.$$

Gli elementi  $s \in \mathcal{F}$  sono detti vettori interi (non negativi), o semplicemente vettori possibili. Per un vettore possibile  $s = (s_0, \dots, s_k)$ , definiamo:

$$\text{La lunghezza : } l(s) := k \text{ (non } k+1),$$

$$\text{Il valore assoluto : } |s| := s_0 + \dots + s_k,$$

$$\text{La norma : } ||s|| := |s| + l(s).$$

Il nostro obiettivo è costruire una mappa

$$\sigma : \Pi(\Gamma_T) \rightarrow \mathcal{F}$$

dall'insieme  $\Pi(\Gamma_T)$  dei cammini nel grafo di Collatz a  $\mathcal{F}$ , in modo tale che la concatenazione dei cammini si rifletta in una appropriata concatenazione di vettori interi. Il punto cruciale in questa costruzione è la definizione di quest'ultima concatenazione, che formalizza l'idea descritta nella sottosezione precedente.

**Definizione 1.11.** Siano  $u = (s_0, \dots, s_k), t = (t_0, \dots, t_l) \in \mathcal{F}$ . La loro concatenazione è definita così:

$$u \cdot t := (s_0, \dots, s_{k-1}, s_k + t_0, t_1, \dots, t_l) \in \mathcal{F}.$$

Al contrario, una equazione del tipo  $s = u \cdot t$  in  $\mathcal{F}$  è detta *decomposizione* di  $s$  nella coppia  $(u, t)$ . Se  $s = u \cdot t$  è una decomposizione di  $s \in \mathcal{F}$ , allora chiamiamo rispettivamente  $u$  la parte iniziale e  $t$  la parte finale di  $s$ .

**Lemma 1.3.1.** *Siano  $r, s, t \in \mathcal{F}$ . Allora:*

(a) *Il vettore  $(0) \in \mathcal{F}$  è neutro rispetto alla concatenazione,  $(0) \cdot r = r \cdot (0) = r$ .*

(b) *La concatenazione è associativa,  $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$ .*

(c) *Le regole di cancellazione destra e sinistra sono valide:*

$$t \cdot r = t \cdot s \Rightarrow r = s, \quad t \cdot r = s \cdot r \Rightarrow t = s.$$

(d) *La lunghezza, il valore assoluto e la norma sono additive:*

$$l(s \cdot t) = l(s) + l(t), \quad |s \cdot t| = |s| + |t|, \quad \|s \cdot t\| = \|s\| + \|t\|$$

La dimostrazione del lemma viene direttamente dalla definizione di concatenazione.

**Lemma 1.3.2.** *Sia  $s \in \mathcal{F}$ , per ogni intero  $k$  con  $0 \leq k \leq \|s\|$ , c'è una unica parte finale  $\tau_k(s)$  di  $s$  con  $\|\tau_k(s)\| = k$ . Inoltre abbiamo che per ogni  $k \in \{1, \dots, \|s\|\}$  si ha  $\tau_k(s) = (1) \cdot \tau_{k-1}(s)$  oppure  $\tau_k(s) = (0, 0) \cdot \tau_{k-1}(s)$ .*

*Dimostrazione.* Dalla regola di cancellazione sinistra e destra e per il fatto che  $(0) \in \mathcal{F}$  è neutro rispetto alla concatenazione, l'affermazione è vera per  $k = 0$  e  $k = \|s\|$ . Infatti nel caso  $k = 0$  abbiamo che dalla definizione di  $\|\tau_0(s)\|$  che  $l(\tau_0(s)) = 0$  e  $\tau_0(s) = 0$ . Mentre nel caso  $k = \|s\|$  abbiamo che  $\tau_{\|s\|}(s)$  è praticamente l'intero vettore  $s$ . Detto questo, se scriviamo  $s = (s_0, \dots, s_l)$ , dalla definizione 1.11 deduciamo che:

$$\begin{aligned} s_l \neq 0 &\Leftrightarrow s = (s_0, \dots, s_{l-1}, s_l - 1) \cdot (1), \\ s_l = 0 &\Leftrightarrow s = (s_0, \dots, s_{l-1}) \cdot (0, 0), \\ s_0 \neq 0 &\Leftrightarrow s = (1) \cdot (s_0 - 1, s_1, \dots, s_l), \\ s_0 = 0 &\Leftrightarrow s = (0, 0) \cdot (s_0, \dots, s_{l-1}, s_l), \end{aligned}$$

I quali provano l'affermazione per  $k = 1$  e  $k = \|s\| - 1$ .

Ora supponiamo che l'affermazione sia vera per qualche  $k < \|s\|$  e poniamo  $s = u \cdot \tau_k(s)$  come l'unica decomposizione di  $s$  con  $\|\tau_k(s)\| = k$ . Allora c'è un'unica decomposizione  $u = u' \cdot t'$  con  $\|t'\| = 1$ . Adesso utilizzando l'associatività della concatenazione dei vettori interi, ottengo  $s = u' \cdot (t' \cdot t)$ , provando che  $\tau_{k+1}(s) := t' \cdot \tau_k(s)$  è una parte finale di  $s$  con  $\|\tau_{k+1}(s)\| = k + 1$ . L'unicità segue allo stesso modo, così ogni parte finale con norma  $k + 1$ , da' origine, in modo unico, a una parte terminale con norma  $k$ .  $\square$

**Teorema 1.3.3.** *C'è una sola mappa  $\sigma : \Pi(\Gamma_T) \rightarrow \mathcal{F}$  che soddisfa:*

- (1) *Se  $(v, w)$  è un arco in  $\Gamma_T$  e  $w = T_0(v)$ , allora  $\sigma(v, w) = (1)$ .*
- (2) *Se  $(v, w)$  è un arco in  $\Gamma_T$  e  $w = T_1(v)$ , allora  $\sigma(v, w) = (0, 0)$ .*
- (3) *Se  $\pi_1, \pi_2 \in \Pi(\Gamma_T)$  tale che la concatenazione  $\pi_1\pi_2$  sia ben definita, allora  $\sigma(\pi_1\pi_2) = \sigma(\pi_1) \cdot \sigma(\pi_2)$ .*

*Dimostrazione.* L'esistenza e l'unicità seguono dal fatto che ogni cammino  $\pi \in \Pi(\Gamma_T)$  ha decomposizione unica in archi, e dall'associatività della concatenazione di vettori interi.  $\square$

**Definizione 1.12.** Per un cammino  $\pi \in \Pi(\Gamma_T)$ , il vettore intero  $\sigma(\pi) \in \mathcal{F}$  è detto *vettore codifica* di  $\pi$ .

Per come abbiamo definito i vettori codifica, abbiamo il seguente fatto:

**Corollario 1.3.4.** *Se  $\pi \in \Pi(\Gamma_T)$  ha lunghezza  $k$ , allora  $\|\sigma(\pi)\| = k$ . Inoltre, se noi prendiamo l'unica decomposizione  $\pi = e_1 \dots e_k$  di  $\pi$  in archi,  $|\sigma(\pi)|$  è il numero di archi dovuti a  $T_0$ , mentre  $l(\sigma(\pi))$  è il numero di archi dovuti a  $T_1$ .*

Adesso studiamo meglio la mappa  $\sigma$ , puntando a scoprire strutture e regolarità nel grafo di Collatz.

### 1.3.3 Ripercorrendo i vettori interi nei razionali

Tornando al fatto che i vertici del grafo di Collatz sono numeri naturali e che è possibile seguire, un cammino sia in avanti che indietro. Con la nostra costruzione del vettore codifica di un cammino considerato, introduciamo i seguenti operatori.

**Definizione 1.13.** Sia  $s = (s_0, \dots, s_k) \in \mathcal{F}$ . L'operatore di back-tracing  $v_s : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  è dato da:

$$v_s := v_+^{s_0} \circ (v_- \circ v_+^{s_1}) \circ \dots \circ (v_- \circ v_+^{s_k}),$$

dove

$$v_+(q) := 2q, \quad v_-(q) := \frac{1}{3}(2q - 1) \quad \text{per } q \in \mathbb{Q}$$

Notiamo che  $v_+$  e  $v_-$  sono, sui razionali, gli operatori inversi dei due rami  $T_0$  e  $T_1$  della funzione  $T$ .

E' immediato notare che gli operatori di back-tracing sono ben definiti rispetto alla concatenazione.

**Corollario 1.3.5.** Se  $s, t \in \mathcal{F}$ , allora  $v_{s \cdot t} = v_s \circ v_t$ .

*Dimostrazione.* Si ottiene subito dalla definizione 1.13 e dalla definizione di concatenazione di vettori.  $\square$

Il seguente lemma giustifica la formulazione dell'operatore di back-tracing.

**Lemma 1.3.6.** Siano  $b \in V_T, k \in \mathbb{N}_0$  e  $\pi_k(b) := (b, T(b), \dots, T^k(b))$  il cammino in  $\Gamma_T$  con vertice iniziale  $b$  e di lunghezza  $k$ . Allora  $v_{\sigma(\pi_k(b))}(T^k(b)) = b$ .

*Dimostrazione.* (Per induzione su  $k$ )

Il lemma è chiaro per  $k = 0$ , infatti in questo caso si ha che  $\pi_0(b) = b$  e

$v_{\sigma(\pi_0(b))}(T^0(b)) = b$ . Sia  $k = 1$ , allora ci sono due possibilità:

Se  $b$  è pari, allora  $T(b) = T_0(b)$  e  $\sigma(\pi_1(b)) = (1)$ , da cui

$$v_{\sigma(\pi_1(b))}(T^k(b)) = v_{(1)}(T^k(b)) = v_+^1(T_0(b)) = b.$$

Se  $b$  è dispari, allora  $T(b) = T_1(b)$  e  $\sigma(\pi_1(b)) = (0, 0)$ , da cui

$$v_{\sigma(\pi_1(b))}(T^k(b)) = v_{(0,0)}(T^k(b)) = (v_+^0 \circ (v_- \circ v_+^0))(T_1(b)) = b.$$

Poniamo  $k > 1$  e scriviamo  $\pi_k(b) = \pi_1(b)\pi_{k-1}(T(b))$ , cioè come una concatenazione. Usando il teorema 1.3.3, dal corollario 1.3.5 e dall'ipotesi induttiva, abbiamo che:

$$\begin{aligned} v_{\sigma(\pi_k(b))}(T^k(b)) &= v_{\sigma(\pi_1(b)) \cdot \sigma(\pi_{k-1}(T(b)))}(T^{k-1} \circ T(b)) = \\ &= v_{\sigma(\pi_1(b))}(v_{\sigma(\pi_{k-1}(T(b)))}(T^{k-1}(T(b)))) = v_{\sigma(\pi_1(b))}(T^k(b)) = b, \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione.  $\square$

Per valutare gli operatori di back-tracing sui numeri razionali, useremo le seguenti grandezze.

**Definizione 1.14.** Dato  $s = (s_0, \dots, s_k) \in \mathcal{F}$ , definiamo:

$$c(s) := \frac{2^{\|s\|}}{3^{l(s)}} \quad e \quad r(s) := \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{j+s_0+\dots+s_j}}{3^{j+1}},$$

e chiamiamo  $c(s)$  il coefficiente (all'indietro) e  $r(s)$  il resto (all'indietro) di  $s$ .

**Lemma 1.3.7.** Siano  $q \in \mathbb{Q}$  e  $s \in \mathcal{F}$ . Allora  $v_s(q) = c(s)q - r(s)$ .

*Dimostrazione.* (Per induzione su  $k = l(s)$ .)

Se  $k = 0$ , cioè  $s = (s_0)$ , allora  $v_s(q) = 2^{s_0}q = c(s)q$ ; la somma nella formula di  $r(s)$  è vuota, quindi  $r(s) = 0$ .

Adesso siano  $s = (s_0, \dots, s_k)$  e  $s' = (s_0, \dots, s_{k-1})$  tale che  $s = s' \cdot (0, s_k)$ .

Allora usando il corollario 1.3.5 e l'ipotesi induttiva, si ha che:

$$v_s(q) = v_{s'} \circ v_{(0, s_k)}(q) = v_{s'} \left( \frac{2}{3} \cdot 2^{s_k}q - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= c(s') \left( \frac{2^{1+s_k}}{3} q - \frac{1}{3} \right) - r(s') = \frac{2^{\|s'\|+1+s_k}}{3^{l(s')+1}} q - \left( r(s') + \frac{2^{\|s'\|}}{3^{l(s')+1}} \right).$$

Inoltre osservando che  $\|s\| = \|s'\| + 1 + s_k$  e  $l(s) = l(s') + 1$ , e valutando

$$r(s') + \frac{2^{\|s'\|}}{3^{l(s')+1}} = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{2^{j+s_0+\dots+s_j}}{3^{j+1}} + \frac{2^{k-1+s_0+\dots+s_{k-1}}}{3^k} = r(s),$$

da questo segue il lemma.  $\square$

**Corollario 1.3.8.** *Siano  $s, t \in \mathcal{F}$ . Allora il coefficiente e il resto soddisfano la seguente condizione:*

$$\begin{pmatrix} c(s \cdot t) & r(s \cdot t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s) & r(s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c(t) & r(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* L'affermazione segue dal corollario 1.3.5 e dal calcolo

$$v_s \circ v_t(q) = c(s)(c(t)q - r(t)) - r(s) = c(s)c(t)q - (c(s)r(t) + r(s)).$$

$\square$

### 1.3.4 I vettori interi ammissibili

Ritorniamo ora al grafo di Collatz  $\Gamma_T = (V_T, E_T)$ , sia fissato il vertice  $a \in V_T = \mathbb{N}$ . Dato un qualsiasi vettore possibile  $s \in \mathcal{F}$ , in genere non sarà sempre vero che l'operatore di back-tracing  $v_s$  mappi  $a$  su un'altro vertice  $b \in V_T$ . Dal fatto che  $V_T = \mathbb{N}$ , questo può essere vero solo se  $b = v_s(a) \in \mathbb{N}$ .

**Definizione 1.15.** Sia dato  $a \in \mathbb{N}$ . Diremo che  $s \in \mathcal{F}$  è *ammissibile rispetto ad  $a$* , se  $v_s(a) \in \mathbb{N}$ , e usiamo la notazione  $\xi(a) := \{s \in \mathcal{F} : v_s(a) \in \mathbb{N}\}$  per l'insieme dei vettori ammissibili rispetto ad  $a$ .

Il nostro prossimo obiettivo è mostrare che ogni vettore ammissibile rispetto ad  $a \in V_T$  è di fatto il vettore codifica di un cammino nel grafo  $\Gamma_T$  con vertice finale  $a$ . Il seguente lemma dà alcune caratterizzazioni equivalenti dei vettori ammissibili.

**Lemma 1.3.9.** *Siano  $s \in \mathcal{F}$  e  $a \in \mathbb{N}$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

$$(a) \ v_s(a) \in \mathbb{N}.$$

$$(b) \ v_s(a) \in \mathbb{Z}.$$

$$(c) \ \text{Per ogni parte finale } t \text{ di } s, \text{ abbiamo } v_t(a) \in \mathbb{Z}.$$

$$(d) \ \text{Per ogni parte finale } t \text{ di } s, \text{ abbiamo } v_t(a) \in \mathbb{N}.$$

*Dimostrazione.*  $(a) \Rightarrow (b)$  è ovvio

$(b) \Rightarrow (c)$  :

Supponiamo  $v_s(a) \in \mathbb{N}$  e scegliamo una decomposizione  $s = r \cdot t$  in  $\mathcal{F}$ .

Allora il lemma 1.3.7 implica:

$$v_t(a) \in \left(\frac{1}{3}\right)^{l(t)} \mathbb{Z}.$$

Inoltre il corollario 1.3.5 e il lemma 1.3.7 ci dicono che

$$v_s(a) = v_u(v_t(a)) = c(u)v_t(a) - r(u).$$

Quindi

$$v_t(a) = \frac{3^{l(u)}}{2^{\|u\|}} (v_s(a) + r(u)) \in \left(\frac{1}{2}\right)^{\|u\|} \mathbb{Z},$$

perché  $3^{l(u)}r(u)$  è un intero. Combinando queste i due risultati, si ha che:

$$v_t(a) \in \left(\frac{1}{2}\right)^{\|u\|} \mathbb{Z} \cap \left(\frac{1}{3}\right)^{l(t)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che  $2^{\|u\|}$  e  $3^{l(u)}$  sono coprimi.

$(c) \Rightarrow (d)$  :

Assumiamo che  $v_t(a) \in \mathbb{Z}$  per ogni parte terminale  $t$  di  $s$ , rimane da mostrare che  $v_t(a) \geq 1$ , quindi per induzione su  $k = \|t\|$ .

Per  $k = 0$ , otteniamo  $t = (0)$  e  $v_t(a) \geq 1$ .



Dal lemma 1.3.2 sappiamo che c'è un'unica parte terminale  $\tau_k(s)$  di  $s$  con  $||\tau_k(s)|| = k$ , per ogni  $k \in \{1, \dots, ||s||\}$ , che soddisfa:

$$\tau_k(s) = (1) \cdot \tau_{k-1}(s) \quad \text{oppure} \quad \tau_k(s) = (0, 0) \cdot \tau_{k-1}(s)$$

Assumendo induttivamente che  $v_{\tau_{k-1}(s)}(a) \geq 1$ , abbiamo nel primo caso

$$v_{\tau_k(s)}(a) = 2v_{\tau_{k-1}(s)}(a) \geq 1,$$

e nel secondo caso

$$v_{\tau_k(s)}(a) = \frac{1}{3}(2v_{\tau_{k-1}(s)}(a) - 1) \geq \frac{1}{3},$$

i quali implicano  $v_{\tau_k(s)}(a) \geq 1$  perché  $v_{\tau_k(s)}(a) \in \mathbb{Z}$ .

$(d) \Rightarrow (a)$  è immediato. □

**Lemma 1.3.10.** *Siano  $a \in \mathbb{N}$  e  $s \in \xi(a)$ . Allora  $T^{||s||}(v_s(a)) = a$ .*

*Dimostrazione.* (Per induzione su  $k = ||s||$ ).

Questo lemma è facile da verificare per  $||s|| \leq 1$ , perché ci sono solo tre vettori possibili  $s \in \mathcal{F}$  con  $||s|| \leq 1$ , ossia  $(0), (1), (0, 0)$ , infatti  $||(0)|| = 0, ||(1)|| = 1, ||(0, 0)|| = 1$ .

Ora consideriamo  $s \in \xi(a)$  con  $||s|| = k > 1$  e assumiamo che  $T^{||t||}(v_t(b)) = b$  per ogni  $b \in \mathbb{N}$  e ogni  $t \in \xi(b)$  con  $||t|| < k$ , allora secondo il lemma 1.3.2, c'è un'unica decomposizione  $s = u \cdot t$  con  $||u|| < k$  e  $||t|| < k$ . Dal lemma 1.3.9 abbiamo  $v_t(a) \in \mathbb{N}$ , vuol dire, dalla definizione 1.15, che  $u \in \xi(v_t(a))$ . Adesso l'ipotesi induttiva da'

$$T^{||s||}(v_s(a)) = T^{||t||+||u||}(v_u(v_t(a))) = T^{||t||}(v_t(a)) = a,$$

che completa la dimostrazione. □

**Teorema 1.3.11.** *Sia  $\Pi^a(\Gamma_T)$  l'insieme dei cammini nel grafo di Collatz con vertice finale  $a \in V_T$ . Allora la mappa  $\sigma$  del teorema 1.3.3 stabilisce una corrispondenza biettiva*

$$\Pi^a(\Gamma_T) \longleftrightarrow \xi(a)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\pi = (b, v_1, \dots, v_{k-1}, a) \in \Pi^a(\Gamma_T)$  un cammino di lunghezza  $k$ . Allora  $\pi = \pi_k(a)$  nella notazione del lemma 1.3.6 e da questo si deduce che

$$v_{\sigma(\pi)}(a) = v_{\sigma(\pi)}(T^k(b)) = b \in \mathbb{N},$$

che significa  $\sigma(\pi) \in \xi(a)$ .

Inoltre ogni vettore  $s \in \xi(a)$  dà origine a un cammino

$$p(s) = (v_s(a), T(v_s(a)), \dots, T^{\|s\|}(v_s(a))),$$

dal lemma 1.3.10 sappiamo che  $t(p(s)) = T^{\|s\|}(v_s(a)) = a$ , che significa  $p(s) \in \Pi^a(\Gamma_T)$ . Adesso il teorema segue dalle relazioni  $\sigma(p(s)) = s$  e  $p(\sigma(\pi)) = \pi$ .  $\square$

**Teorema 1.3.12.** *Se  $a \in V_T$  è non ciclico, allora la mappa  $\xi(a) \rightarrow P_T(a), s \mapsto v_s(a)$ , è una biezione.*

*Dimostrazione.* La mappa in questione nasce come una composizione della mappa  $p : \xi(a) \rightarrow \Pi^a(\Gamma_T)$  la quale è stata considerata nella dimostrazione del teorema precedente e la mappa  $i : \Pi^a(\Gamma_T) \rightarrow V_T$  che associa a ogni cammino  $\pi$  il suo vertice iniziale  $i(\pi)$ .

La mappa  $p$  è una biezione, dal teorema 1.3.11. Inoltre dall'osservazione 3 sappiamo che  $P_T(a)$  genera un albero orientato, se  $a \in V_T$  non è ciclico. Ma un grafo orientato  $\Gamma = (V, E)$  è un albero orientato, se e solo se, per ogni coppia di vertici  $x, y \in V$ , c'è almeno un cammino non orientato da  $x$  a  $y$  e al più un cammino tra  $x$  e  $y$ . Si nota che questo implica che un albero ha al più un cammino tra i vertici dell'albero orientato.

Quindi, anche la mappa  $i$  è una biezione, e il teorema è provato.  $\square$

## 1.4 Proprietà dei vettori ammissibili

L'insieme  $\xi(a)$  dei vettori interi non negativi che sono ammissibili rispetto a qualche  $a \in \mathbb{N}$ , ha alcune interessanti strutture intrinseche, che si riflettono in certe proprietà del grafo di Collatz.

Fondamentalmente questa struttura viene dal fatto che 2 è una radice primitiva modulo  $3^l$ , per ogni  $l \in \mathbb{N}$ , cioè le potenze  $2^k$  con  $k \in \mathbb{N}$ , attraversano tutte le classi di resto modulo  $3^l$  i cui elementi non sono divisibili per 3.

### 1.4.1 Riconoscere i vettori ammissibili

Il seguente risultato è stato provato da Terras [Ter1] e Everett[Eve]; per ogni intero  $k > 0$ , la funzione  $n \mapsto E_k(n)$  mappa un numero naturale  $n$  sul suo vettore di parità, la mappa è sia suriettiva sull'insieme degli  $0-1$ -vettori di lunghezza  $k$  e periodici di periodo  $2^k$ . Questo significa che ogni  $0-1$ -vettore  $(x_0, \dots, x_k)$  è dato da un vettore di parità  $E_k(n)$ , esattamente dal numero naturale  $n$  contenuto nella classe di resto  $a \pmod{2^k}$ .

C'è una simile affermazione riguardo ai vettori codifica discussi qui.

**Lemma 1.4.1.** *Sia dato  $s \in \mathcal{F}$ , allora c'è esattamente una classe di resto  $a \pmod{3^{l(s)}}$  tale che:*

$$s \in \xi(b) \iff b \equiv a \pmod{3^{l(s)}}.$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione 1.15 e dal lemma 1.3.9, abbiamo che  $s \in \xi(b) \iff v_s(b) \in \mathbb{Z}$ . Il lemma 1.3.7 ci dice che:

$$v_s(b) = c(s)b - r(s) = \frac{1}{3^{l(s)}} (2^{\|s\|}b - 3^{l(s)}r(s)),$$

Posto  $d := 3^{l(s)}r(s) \in \mathbb{N}$ . Quindi

$$s \in \xi(b) \iff 2^{\|s\|}b \equiv d \pmod{3^{l(s)}}.$$

Così  $2^{\|s\|}$  e  $3^{l(s)}$  sono coprimi, questa congruenza è risolta da una sola classe di resto  $a \pmod{3^{l(s)}}$ . □

Questo lemma giustifica il termine 'possibile' per i vettori interi non negativi  $s \in \mathcal{F}$ .

### 1.4.2 Estensione dei vettori ammissibili

Cerchiamo di estendere un dato vettore possibile in modo tale che il vettore esteso conservi (o guadagni) la proprietà di essere ammissibile rispetto a qualche  $b \in \mathbb{N}$ . In linea di principio, un vettore possibile  $s \in \mathcal{F}$  può essere esteso in due modi diversi:

sia prendendo  $t \cdot s$  sia prendendo  $s \cdot t$  come il vettore esteso.

**Lemma 1.4.2.** *Siano dati  $a \in \mathbb{N}$  e  $s \in \xi(a)$ .*

(a) *Abbiamo  $(k) \cdot s \in \xi(a)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}_0$ .*

(b) *Se  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ , allora c'è un  $b \in \mathbb{N}$  con  $b \equiv a \pmod{3^{l(s)}}$  tale che  $(k, 0) \cdot s \in \xi(b)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}_0$ .*

*Dimostrazione.* (a)

Dalla definizione 1.15,  $v_s(a) \in \mathbb{N}$ . Il corollario 1.3.5 e la definizione 1.13 ci danno:

$$v_{(k) \cdot s}(a) = v_{(k)}(v_s(a)) = 2^k v_s(a) \in \mathbb{N} \Rightarrow (k) \cdot s \in \xi(a).$$

(b)

Poiché  $(k, 0) \cdot s = (k) \cdot (0, 0) \cdot s$ , basta trovare  $b \in \mathbb{N}$  tale che  $(0, 0) \cdot s \in \xi(b)$ .

Abbiamo che per ogni  $b \in \mathbb{N}$ , secondo la definizione 1.13,

$$v_{(0,0) \cdot s}(b) = v_{-}(v_s(b)) = \frac{1}{3}(2v_s(b) - 1).$$

Per renderlo un numero intero, dobbiamo assicurarci che  $v_s(b) \equiv 2 \pmod{3}$ .

Poniamo  $b := a + 3^{l(s)}j$  e cerchiamo un adeguato  $j \in \mathbb{Z}$ . Dal lemma 1.3.7 abbiamo che

$$v_s(b) = c(s) (a + 3^{l(s)}j) - r(s) = v_s(a) + 2^{\|s\|}j.$$

Dal fatto che  $2^{\|s\|} \not\equiv 0 \pmod{3}$ , possiamo risolvere la congruenza  $v_s(a) + 2^{\|s\|}j \equiv 2 \pmod{3}$  per  $j$ , che completa questa dimostrazione.  $\square$

**Lemma 1.4.3.** *Siano  $a, l \in \mathbb{N}, a \not\equiv 0 \pmod{3}, s = (s_0, \dots, s_l) \in \mathcal{F}$  e sia  $k \in \mathbb{N}_0$ . Allora c'è esattamente una classe di resto  $b \pmod{2 \cdot 3^l}$  tale che*

$$(s_0, \dots, s_l, k) = s \cdot (0, k) \in \xi(a) \iff k \equiv b \pmod{2 \cdot 3^l}.$$

*Dimostrazione.* Noi sappiamo dal lemma 1.4.1 che c'è soltanto una classe di resto  $c \pmod{3^{l-1}}$  tale che, per  $d \in \mathbb{N}$ ,

$$s \in \xi(d) \iff d \equiv c \pmod{3^l}.$$

adesso la dimostrazione continua con:

$$\begin{aligned} s \cdot (0, k) \in \xi(a) &\iff s \in \xi\left(\frac{2^{k+1}a - 1}{3}\right) \iff \frac{2^{k+1}a - 1}{3} \equiv c \pmod{3^l} \\ &\iff 2^{k+1}a \equiv 3c + 1 \pmod{3^{l+1}}. \end{aligned}$$

Perché  $3c + 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ,  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ , e 2 genera il gruppo ciclico moltiplicativo delle classi di resto  $r \pmod{3^{l+1}}$  con  $r \not\equiv 0 \pmod{3}$ , notiamo che c'è soltanto una classe di resto  $b \pmod{2 \cdot 3^l}$  tale che

$$2^{k+1}a \equiv 3c + 1 \pmod{3^{l+1}} \iff k \equiv b \pmod{2 \cdot 3^l}.$$

$\square$

**Lemma 1.4.4.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a)  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ .

(b) C'è un  $s \in \xi(a)$  con  $l(s) = 1$ .

(c) Per ogni  $l \in \mathbb{N}_0$ , c'è un  $s \in \xi(a)$  con lunghezza  $l(s) = l$ .

*Dimostrazione.*  $(a) \Rightarrow (b)$

Se  $a \equiv 1 \pmod{3}$ , allora  $4a - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ , da cui

$$v_{(0,1)}(a) = v_{-}(2a) = \frac{4a - 1}{3} \in \mathbb{N}.$$

Questo implica  $(0, 1) \in \xi(a)$ , che è  $(b)$ . Se  $a \equiv 2 \pmod{3}$ , allora  $2a - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ , concludiamo che  $(0, 0) \in \xi(a)$ , ottenendo ancora  $(b)$ .

$(b) \Rightarrow (c)$

Per induzione su  $l$ , assumiamo che ci siano alcuni vettori  $s \in \xi(a)$  con  $l(s) = l \geq 1$ . Dobbiamo mostrare che ci sono alcuni  $t \in \xi(a)$  con  $l(t) = l(s) + 1$ . Dobbiamo provare che alcuni  $u \in \xi(a)$  soddisfano sia  $l(u) = l(s)$  che  $v_u(a) \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Se otteniamo queste condizioni, il passo  $(a) \Rightarrow (b)$  mostra che c'è un vettore  $t' \in \xi(v_u(a))$  con  $l(t') = 1$  e sarà tale che  $t := t' \cdot u$ .

Adesso costruiamo  $u$  a partire da  $s$ . Se  $v_s(a) \not\equiv 0 \pmod{3}$ , poniamo  $u := s$ , e abbiamo finito. Se  $v_s(a) \equiv 0 \pmod{3}$ , scriviamo  $s = (s_0, \dots, s_l) = (s_0, 0) \cdot t$  con  $t = (s_1, \dots, s_l)$  (ricordiamo che  $l \geq 1$ ). Allora

$$v_s(a) = v_{(s_0,0)}(v_t(a)) = 2^{s_0} \frac{2v_t(a) - 1}{3} \equiv 3 \pmod{3}$$

implica  $2v_t(a) \equiv 1 \pmod{9}$ . Questo ci dice che  $2v_{(2) \cdot t}(a) = 2^3 v_t(a) \equiv 4 \pmod{9}$ .

Adesso poniamo  $u := (2, 0) \cdot t = (0, s_1 + 2, s_2, \dots, s_l)$  e siamo sicuri che:

$$v_u(a) = \frac{2^3 v_t(a) - 1}{3} \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

$(c) \Rightarrow (a)$

Sia  $s \in \xi(a)$  di lunghezza 1, cioè  $s = (s_0, s_1)$ . Allora  $v_s(a) = \frac{2^{s_0}(2^{s_1+1}a-1)}{3} \in \mathbb{Z}$ , cioè  $2^{s_1+1}a \equiv 1 \pmod{3}$ . Questo implica  $(a)$ .  $\square$

**Corollario 1.4.5.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

$$(a) \quad a \equiv 0 \pmod{3}.$$

$$(b) \quad \xi(a) = \{(k) : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

$$(c) \quad P_T(a) = \{2^k a : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

*Dimostrazione.*  $(a) \iff (b)$

è un'altra versione del lemma 1.4.4,

$(b) \Rightarrow (c)$  è immediato.

$(c) \Rightarrow (b)$

Assumiamo che  $\xi(a)$  contenga un vettore di lunghezza 1, diciamo  $s = (s_0, s_1)$ .

Allora  $v_s(a) \in P_T(a)$  insieme a  $(c)$  prova:

$$\frac{2^{s_1+1}a - 1}{3} = 2^k a \quad \text{per qualche } k \in \mathbb{N}_0.$$

Questo implica che  $(2^{s_1+1} - 3 \cdot 2^k)a = 1$ , dove ogni fattore è un numero naturale. Di conseguenza  $a = 1$ , ma sappiamo bene che  $P_T(1) \neq \{2^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ , quindi l'assunzione  $(s_0, s_1) \in \xi(a)$  è falsa.  $\square$

### 1.4.3 I vettori interi simili

Motivati dal lemma 1.4.2, adesso introduciamo una relazione di equivalenza sull'insieme  $\mathcal{F}$  che agisce bene rispetto alla proprietà di essere ammissibile rispetto a qualche  $a \in \mathbb{N}$ .

**Definizione 1.16.** Sia  $s = (s_0, \dots, s_k), t = (t_0, \dots, t_l) \in \mathcal{F}$ . Poniamo:

$$s \simeq t \iff \begin{cases} l(s) = l(t) & e \\ s_j \equiv t_j \pmod{2 \cdot 3^{j-1}} & \text{per ogni } j \in \{1, \dots, l(s)\}. \end{cases}$$

Diciamo che  $s$  e  $t$  sono *simili*, se  $s \simeq t$ . L'insieme  $\{s\}^\simeq = \{t \in \mathcal{F} : t \simeq s\}$  è detto *classe di similitudine di  $s$* .

E' chiaro che questa relazione  $s \simeq t$  è una relazione di equivalenza sull'insieme  $\mathcal{F}$ .

**Lemma 1.4.6.** Siano  $a \in \mathbb{N}, s \in \xi(a)$  e  $t \in \mathcal{F}$  tali che  $s \simeq t$ , allora  $t \in \xi(a)$ .

*Dimostrazione.* (Per induzione su  $k = l(s)$ )

Dato  $l(s) = 0$ , non c'è niente da dimostrare, perché ogni vettore  $t \in \mathcal{F}$  con  $l(t) = 0$  soddisfa sia  $t \simeq s$  che  $t \in \xi(a)$ .

Adesso sia  $k = l(s) = l(t) \geq 1$  e sia  $s \simeq t$ . Allora abbiamo solo le seguenti decomposizioni

$$s = s' \cdot (0, s_k) \quad e \quad t = t' \cdot (0, t_k),$$

con  $l(s') = l(t') = k - 1$  e le proprietà:

$$s' \simeq t' \quad e \quad s_k \equiv t_k \pmod{2 \cdot 3^{k-1}}.$$

Possiamo concludere da  $s \in \xi(a)$  che  $s' \in \xi(v_{(0,s_k)}(a))$ . Allora l'ipotesi induttiva ci dà  $t' \in \xi(v_{(0,s_k)}(a))$ . Ma  $s_k \equiv t_k \pmod{2 \cdot 3^{k-1}}$  implica:

$$v_{(0,s_k)}(a) \equiv v_{(0,t_k)}(a) \pmod{3^{k-1}}.$$

Dal lemma 1.4.1, questo significa che  $t' \in \xi(v_{(0,t_k)}(a))$ , il quale implica che  $t \in \xi(a)$ . □

#### 1.4.4 Schemi ricorrenti nel grafo di Collatz

Il lemma 1.4.1 implica che ogni vettore possibile  $s \in \mathcal{F}$  si realizza nel grafo di Collatz infinite volte. Inoltre ci sono infiniti sottografi del grafo di Collatz che ricorrono un numero infinito di volte.

Per formulare precisamente questo fatto, fissiamo due numeri  $a, k \in \mathbb{N}$ , dove  $a$  è considerato un vertice del grafo di Collatz  $\Gamma_T = (V_T, E_T)$ .

I sottografi ricorrenti sono costruiti utilizzando certi vertici nell'insieme dei predecessori  $P_T(a)$ . Poniamo:

$$P_T^{(\#T_1 \leq k)}(a) := \left\{ b \in P_T(a) : \begin{array}{l} \text{il cammino } \pi, \text{ da } b \text{ ad } a \text{ contenga} \\ \text{al più } k \text{ archi provenienti da } T_1. \end{array} \right\}.$$

Utilizzando l'osservazione 3, sappiamo che, se  $a$  non è ciclico, il sottografo completo generato da questo insieme di vertici,

$$\Gamma_T(a, k) := \langle P_T^{(\#T_1 \leq k)}(a) \rangle_T,$$



è un albero orientato con  $a$  vertice finale.

**Lemma 1.4.7.** *Fissati  $k \in \mathbb{N}$  e  $a, b \in V_T$ , supponiamo che  $b \not\equiv 0 \pmod{3}$  e che  $a$  non sia ciclico. Allora  $\langle P_T(b) \rangle_T$  contiene un sottografo ch'è isomorfo a  $\Gamma_T(a, k)$*

*Dimostrazione.* Utilizzando il teorema 1.3.12, il corollario 1.3.4 e usando il fatto che  $a \in V_T$  non è ciclico, abbiamo una biezione

$$P_T^{(\#T_1 \leq k)}(a) \leftrightarrow \{s \in \xi(a) : l(s) \leq k\}.$$

Se  $a \equiv 0 \pmod{3}$ , allora sappiamo dal lemma 1.4.4 che:

$$\xi(a) = \{s \in \mathcal{F} : l(s) = 0\} \subset \xi(c) \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{N}.$$

Così, in questo caso  $P_T^{(\#T_1 \leq k)}(a) = \{2^m a : m \in \mathbb{N}_0\}$  e ogni predecessore non ciclico  $c$  di  $b$  (il quale chiaramente esiste dall'osservazione 5), danno luogo a un sottografo

$$(\{2^m a : m \in \mathbb{N}_0\})_T \cong \Gamma_T(a, k).$$

Con la notazione  $\cong$  si intende 'isomorfo a'.

Se  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ , dal lemma 1.4.1 si deduce che

$$\{s \in \xi(a) : l(s) \leq k\} = \{s \in \xi(c) : l(s) \leq k\} \iff c \equiv a \pmod{3^k}.$$

Se  $c$  non è ciclico, il grafo  $\Gamma_T(c, k)$  ha la proprietà che, per ogni vertice  $d \in P_T^{(\#T_1 \leq k)}(c)$ , c'è un solo cammino in  $\Gamma_T(c, k)$  da  $d$  a  $c$ . Quindi in questo caso la corrispondenza biunivoca

$$P_T^{(\#T_1 \leq k)}(a) \leftrightarrow \{s \in \xi(a) : l(s) \leq k\} \leftrightarrow P_T^{(\#T_1 \leq k)}(c)$$

induce un isomorfismo tra i sottografi  $\Gamma_T(a, k)$  e  $\Gamma_T(c, k)$ . Rimane da mostrare che c'è un vertice  $c \in P_T(b)$  ch'è non ciclico e soddisfa  $c \equiv a \pmod{3^k}$ . Per questo, ricordiamo ancora che le potenze di 2 attraversano tutte le classi di resto  $r \pmod{3^k}$  i cui elementi non sono divisibili per 3. Usando  $b \not\equiv 0$

mod 3, vediamo che c'è una classe di resto  $\gamma \pmod{2 \cdot 3^{k-1}}$  tale che, per  $\beta \in \mathbb{N}_0$ ,

$$2^\beta b \equiv a \pmod{3^k} \iff \beta \equiv \gamma \pmod{2 \cdot 3^{k-1}}.$$

Ma è chiaro che  $\langle P_T(b) \rangle_T$  è debolmente connesso (dall'osservazione 3). Quindi ha al più un numero finito di vertici ciclici (dall'osservazione 5), ora possiamo concludere che c'è un numero  $\beta^* \in \mathbb{N}_0$  tale che

$$c := 2^{\beta^*} b \equiv a \pmod{3^k}$$

è non ciclico e questo completa la dimostrazione.  $\square$

**Teorema 1.4.8.** *Sia  $k \in \mathbb{N}$  e sia  $a \in V_T$  un vertice non ciclico del grafo di Collatz  $\Gamma_T$ . Allora per ogni componente connessa  $\Gamma'$  di  $\Gamma_T$ , c'è un insieme infinito di coppie disgiunte di sottografi di  $\Gamma'$  ognuno dei quali è isomorfo a  $\Gamma_T(a, k)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\Gamma' = (V', E')$  una componente debole di  $\Gamma_T$ . Possiamo costruire induttivamente una successione di vertici  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset V'$  tali che, per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , valgono le seguenti tre condizioni:

- (1)  $x_m \not\equiv 0 \pmod{3}$ .
- (2)  $x_m$  non è ciclico in  $\Gamma'$ .
- (3)  $P_T(x_m) \cap P_T^{(\#T_1 \leq k)}(x_j) = \emptyset$  per  $j = 1, \dots, m-1$ .

Avendo una tale successione  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , il teorema segue dal lemma 1.4.7.

Per costruire  $x_1$ , prendiamo ogni vertice  $b \in V'$ . Così  $\Gamma'$  è una componente debole, la traiettoria  $(T^j(b))_{j \in \mathbb{N}_0}$  è composta dai vertici di  $V'$ . Sia  $h$  il più grande numero di  $\mathbb{N}_0$  tale che  $2^h$  divida  $b$ . Allora  $c := T^h(b)$  è dispari e abbiamo:

$$T(c) = T_1(c) = \frac{1}{2}(3c + 1) \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Ma dall'osservazione 5 sappiamo che tra gli infiniti vertici  $2^\beta T(c)$ ,  $\beta \in \mathbb{N}_0$ , solo un numero finito può essere ciclico. Così, c'è un numero  $\beta^* \in \mathbb{N}_0$ , tale che

$$x_1 := 2^{\beta^*} T(c)$$

soddisfi la condizione (1) e (2) (per  $m = 1$ , (3) è vuoto)

Adesso supponiamo che  $x_1, \dots, x_m$  siano già fissati e soggetti delle condizioni (1) – (3). Usando (1) per  $x_m$ , il lemma 1.4.4 implica che c'è una successione  $s \in \xi(x_m)$  con  $l(s) = k + 2$ , cioè

$$s = (s_0, \dots, s_{k+2}) = (s_0, 0) \cdot t \quad \text{con } t := (s_1, \dots, s_{k+2}).$$

Per il lemma 1.4.4 abbiamo che

$$x_{m+1} := v_t(x_m) \not\equiv 0 \pmod{3},$$

da cui abbiamo che la condizione (1) è soddisfatta per  $x_{m+1}$ . Non ci sono altri problemi con (2), perché  $x_{m+1}$  è definito come un predecessore del vertice non ciclico  $x_m$ , da cui  $x_{m+1}$  è anch'esso non ciclico.

Rimane da provare la condizione (3). Osserviamo che  $x_{m+1} \notin P_T^{(\#T_1 \leq k)}(x_m)$ , perché  $x_m$  è non ciclico e perché abbiamo un cammino da  $x_{m+1}$  a  $x_m$ , il cui vettore codifica  $t$  soddisfa  $l(t) = k + 1 > k$ .

Da qui possiamo concludere che

$$P_T(x_{m+1}) \subset P_T(x_m) \quad \text{e} \quad P_T(x_{m+1}) \cap P_T^{(\#T_1 \leq k)}(x_j) = \emptyset,$$

le quali implicano la condizione (3). □

## 1.5 Funzioni di conteggio e una stima

In questa sezione costruiremo delle funzioni di conteggio per le nostre analisi del grafo di Collatz e mostreremo ch'è possibile ottenere questa funzione di conteggio da un processo induttivo indipendente. Infine daremo una stima dalla misura della 'grandezza' dell'insieme dei predecessori di  $3n + 1$ , ch'è basata sulle funzioni di conteggio.

### 1.5.1 Funzione di conteggio per i vettori ammissibili

Dato  $a \in \mathbb{N}$ , i vettori ammissibili per quanto riguarda  $a$ , possono essere organizzati secondo la loro lunghezza, o il loro valore assoluto, o entrambi. Definiamo le funzioni di conteggio, in modo tale che riflettano questa struttura e ne proviamo alcune sue proprietà. In particolare, troveremo una formula che ci permetta di costruire queste funzioni di conteggio induttivamente, senza riferimento al grafo di Collatz.

**Definizione 1.17.** Dati  $a \in \mathbb{N}$  e  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , definiamo:

$$\xi_{l,k}(a) := \{s \in \xi(a) : l(s) = l, |s| = k\}.$$

Adesso fissato  $l \in \mathbb{N}_0$ , una *funzione di conteggio per vettori ammissibili* è definita come

$$e_l : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \quad e_l(k, a) := |\xi_{l,k}(a)|.$$

Guardiamo ora alcune proprietà di queste funzioni di conteggio.

**Lemma 1.5.1.** *Dati  $a, b \in \mathbb{N}$  e  $j, k, l \in \mathbb{N}_0$ , abbiamo:*

- (a)  $e_0(k, a) = 1$ .
- (b) Se  $k \geq j$ , allora  $e_l(k, a) \geq e_l(j, a)$ .
- (c) Se  $l \geq 1$  e  $a \equiv 0 \pmod{3}$ , allora  $e_l(k, a) = 0$ .
- (d) Se  $a \equiv b \pmod{3^l}$ , allora  $e_l(k, a) = e_l(k, b)$ .

*Dimostrazione.* (a) è dovuto al fatto che  $(k) \in \mathcal{F}$  è l'unico vettore possibile con lunghezza 0 e valore assoluto  $k$ , inoltre questo vettore  $(k)$  è ammissibile per quanto riguarda ogni  $a \in \mathbb{N}$ .

(b) segue dalla parte (a) del lemma 1.4.2, così  $s \in \xi_{l,j}(a)$  implica  $(k - j) \cdot s \in \xi_{l,k}(a)$  per ogni  $a \in \mathbb{N}$ .

(c) è una riformulazione del lemma 1.4.4.

(d) segue dal lemma 1.4.1, così il lemma implica che  $\xi_{l,k}(a) = \xi_{l,k}(b)$  ogni volta che  $a \equiv b \pmod{3^l}$ . □

Una delle più importanti caratteristiche delle funzioni di conteggio è il fatto ch'è possibile calcolare  $e_{l+1}$  da  $e_l$ .

**Lemma 1.5.2.** *Siano  $a \in \mathbb{N}$  e  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , posto  $e_l(j, q) := 0$  per  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $q \in (\frac{1}{3}\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}$ . Allora*

$$e_{l+1}(k, a) = \sum_{j=0}^k e_l \left( k - j, \frac{2^{j+1}a - 1}{3} \right).$$

*Dimostrazione.* Se estendiamo la notazione della definizione 1.17 ponendo  $\xi_{l,j}(q) := \emptyset$  per  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $q \in (\frac{1}{3}\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}$ , allora c'è una corrispondenza biunivoca

$$\xi_{l+1,k}(a) \leftrightarrow \bigcup_{j=0}^k \xi_{l,k-j} \left( \frac{2^{j+1}a - 1}{3} \right),$$

perciò l'unione sulla destra è disgiunta. Infatti, un vettore ammissibile

$$(s_0, \dots, s_l, j) \in \xi_{l+1,k}(a)$$

corrisponde in modo unico a un vettore ammissibile

$$(s_0, \dots, s_l) \in \xi_{l,k-j}(v_{(0,j)}(a)) = \xi_{l,k-j} \left( \frac{2^{j+1}a - 1}{3} \right),$$

per il viceversa (si guardi alla dimostrazione del lemma 1.4.3). Così il lemma segue dalla definizione 1.17.  $\square$

Diamo ora una definizione che ci servirà, sia adesso che in seguito.

**Definizione 1.18.** L'insieme degli interi 3-adici è definito come

$$\mathbb{Z}_3 := \{(a_j)_{j=0}^\infty : a_j \in \{0, 1, 2\} \text{ per ogni } j \in \mathbb{N}_0\}.$$

Inoltre gli elementi  $a_j(x)$  di un intero 3-adico  $x = (a_j(x))_{j=0}^\infty \in \mathbb{Z}_3$  sono dette *cifre 3-adiche* di  $x$ .

**Corollario 1.5.3.** *La successione di funzioni di conteggio  $(e_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$  è determinata univocamente da*

$$(1) \quad e_0(k, a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in (\bigcup_{v=1}^{\infty} \frac{1}{3^v} \mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{se } a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(2) \quad e_{l+1}(k, a) = \sum_{j=0}^k e_l \left( k - j, \frac{2^{j+1}a - 1}{3} \right) \quad \text{per } l \in \mathbb{N}_0.$$

Tenendo presente la parte (d) del lemma 1.5.1, questo corollario ci consente di definire le funzioni di conteggio sul prodotto  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}_3$  dove  $\mathbb{Z}_3$  è l'insieme degli interi 3-adici.

Infatti usando la funzione parte intera inferiore e superiore, per  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}, \quad \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\},$$

adesso siamo in grado di valutare  $e_1$ .

**Corollario 1.5.4.** *Siano  $a \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{N}_0$ . Allora:*

$$e_1(k, a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \equiv 0 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{(k+1)}{2} \rfloor & \text{se } a \equiv 1 \pmod{3}, \\ \lceil \frac{(k+1)}{2} \rceil & \text{se } a \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Dobbiamo usare la parte (a) del lemma 1.5.1 e la formula del lemma 1.5.2:

$$e_1(k, a) = \sum_{j=0}^k e_0 \left( k - j, \frac{2^{j+1}a - 1}{3} \right).$$

Ciò che dobbiamo fare è verificare se la frazione è un intero. Se  $a \equiv 0 \pmod{3}$ , allora il denominatore  $2^{j+1}a - 1$  non è mai divisibile per 3 e otteniamo  $e_1(k, a) = 0$ .

Sia  $a \equiv 1 \pmod{3}$ , allora

$$\frac{2^{j+1}a - 1}{3} \in \mathbb{Z} \iff j \equiv 1 \pmod{2};$$

quindi ci sono esattamente  $\lfloor \frac{(k+1)}{2} \rfloor$  numeri dispari definiti con  $j$  nell'intervallo  $0 \leq j \leq k$ . Questo ci da il valore di  $e_1(k, a)$  in questo caso.

Allo stesso modo,  $a \equiv 2 \pmod 3$  implica che solo i  $j$  pari contribuiscono alla somma per calcolare  $e_1$ . Così ci sono esattamente  $\lceil \frac{(k+1)}{2} \rceil$  numeri pari definiti con  $j$  nell'intervallo  $0 \leq j \leq k$ , da questo segue il corollario.  $\square$

### 1.5.2 Il conteggio dei predecessori di una lunghezza data

Le funzioni di conteggio  $e_l$  possono essere usate per ottenere informazioni sulla grandezza degli insiemi dei predecessori  $P_T(a)$  come sottoinsiemi di  $\mathbb{N}$ , a patto che sappiamo abbastanza informazioni sulla successione  $(e_l)_{l \in \mathbb{N}}$ . Per fare ciò, fissiamo  $a \in \mathbb{N}$ . Allora è chiaro che le cardinalità degli insiemi

$$P_T^\nu(a) = \{x \in P_T(a) : 2^{\nu-1}a < x \leq 2^\nu a\}, \quad \text{per } \nu \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

sono di una certa rilevanza per stimare le funzioni di conteggio di  $P_T(a) \subset \mathbb{N}$  precedentemente definite. E' chiaro che, nel caso  $a \equiv 0 \pmod 3$ , il lemma 1.4.4 implica che  $|P_T^\nu(a)| = 1$  per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$ . Per gestire gli altri casi, abbiamo bisogno di ulteriori considerazioni. Il prossimo lemma richiama la definizione di coefficiente  $c(s)$  e resto  $r(s)$  di un vettore possibile  $s \in \mathcal{F}$ , poniamo

$$\xi^\nu(a) := \{s \in \xi(a) : 2^{\nu-1} < c(s) \leq 2^\nu\}. \quad (1.2)$$

**Lemma 1.5.5.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$  non ciclico in  $\Gamma_T$  e sia  $\nu \in \mathbb{R}$ . Allora c'è una funzione  $\beta_\nu : \xi^\nu(a) \rightarrow \mathbb{N}_0$  tale che la seguente mappa sia ben definita iniettiva:*

$$i_\nu : \xi^\nu(a) \rightarrow P_T^\nu(a), \quad i_\nu(s) := 2^{\beta_\nu(s)} v_s(a).$$

*Dimostrazione.* Se  $s \in \xi^\nu(a)$ , allora dal lemma 1.3.7,  $v_s(a) = c(s)a - r(s) \leq c(s)a$  dato che  $r(s) \geq 0$ . Allora c'è esattamente un intero  $\beta_\nu(s) \geq 0$ , tale che

$$2^{\nu-1}a < 2^{\beta_\nu(s)} v_s(a) \leq 2^\nu a.$$

Per vedere l'injectività della mappa definita da  $i_\nu(s)$ , prendiamo un ulteriore vettore  $t \in \xi^\nu(a)$  e supponiamo che  $i_\nu(s) = i_\nu(t)$ . Di conseguenza,

$$v_{(\beta_\nu(s)).s}(a) = 2^{\beta_\nu(s)} v_s(a) = 2^{\beta_\nu(t)} v_t(a) = v_{(\beta_\nu(t)).t}(a).$$

Il fatto che  $a$  non sia ciclico, implica dal teorema 1.3.12 che

$$(\beta_\nu(s)) \cdot s = (\beta_\nu(t)) \cdot t. \quad (1.3)$$

Adesso segue

$$2^{\beta_\nu(s)} c(s) = c((\beta_\nu(s)) \cdot s) = c((\beta_\nu(t)) \cdot t) = 2^{\beta_\nu(t)} c(t),$$

Il quale risulta essere:

$$c(s) = 2^{\beta_\nu(t) - \beta_\nu(s)} c(t).$$

Perché  $2^{\nu-1} < c(s) \leq 2^\nu$  e  $2^{\nu-1} < c(t) \leq 2^\nu$ , si deduce che  $\beta_\nu(t) = \beta_\nu(s)$ , il quale da' con la cancellazione sinistra di 1.3 (valida per il lemma 1.3.1) la relazione  $s = t$ .  $\square$

**Teorema 1.5.6.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$  non ciclico come vertice del grafo di Collatz della funzione  $T$  e sia  $\nu \in \mathbb{R}$ . Allora fissata la costante  $\lambda = \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$ , abbiamo che*

$$|P_T^\nu(a)| \geq \sum_{l=0}^{\infty} e_l(\lfloor \nu + \lambda l \rfloor, a).$$

*Dimostrazione.* Siccome  $a$  è stato assunto non ciclico, il lemma 1.5.5 ci fornisce una mappa iniettiva  $i_\nu : \xi^\nu(a) \rightarrow P_T^\nu(a)$ . Questo è sufficiente per stimare  $|\xi^\nu(a)|$ .

$$\begin{aligned} s \in \xi^\nu(a) &\iff 2^{\nu-1} < c(s) \leq 2^\nu \iff 2^{\nu-1} < 2^{|s|} \left(\frac{2}{3}\right)^{l(s)} \leq 2^\nu \\ &\iff \nu - 1 < |s| - \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) l(s) \leq \nu \iff \nu + \lambda l(s) - 1 < |s| \leq \nu + \lambda l(s) \\ &\iff |s| = \lfloor \nu + \lambda l(s) \rfloor \iff s \in \xi_{l(s), \lfloor \nu + \lambda l(s) \rfloor}(a) \end{aligned}$$

Usando inoltre la definizione 1.17, si ha

$$|P_T^\nu(a)| \geq |\xi_\nu(a)| = \left| \bigcup_{l=0}^{\infty} \xi_{l(s), \lfloor \nu + \lambda l(s) \rfloor}(a) \right| = \sum_{l=0}^{\infty} e_l(\lfloor \nu + \lambda l(s) \rfloor, a).$$

$\square$



*Osservazione 6.* Per ogni  $a \in \mathbb{N}$ , solo un numero finito di termini della somma nella stima del teorema, sono diversi da zero. Inoltre il lemma 1.4.1 mostra che, per ogni dato  $l \in \mathbb{N}$  e  $\nu \geq \lambda l$ , ci sono numeri  $a \in \mathbb{N}$  tali che  $e_l(\lfloor \nu + \lambda l(s) \rfloor, a) \geq 1$ . Questo significa che sarebbe difficile fissare in anticipo il numero totale di termini diversi da zero nella stima della somma del teorema precedente. C'è solo una eccezione banale: se  $a \equiv 0 \pmod{3}$ , allora sappiamo dal lemma 1.5.1 che  $e_l(k, a) = 0$  per  $l \geq 1$ , e  $e_0(k, a) = 1$ . Inoltre in questo caso è facile vedere che  $|P_T^\nu(a)| = 1$  per ogni numero reale  $\nu \geq 0$ .

Riformuliamo tutto ciò in termini di funzione conteggio dell'insieme dei predecessori  $P_T(a)$ .

**Corollario 1.5.7.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$  non ciclico in  $\Gamma_T$ . Allora, per ogni  $x > 0$  reale,*

$$Z_{P_T(a)}(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} e_l\left(\left\lfloor \log_2 \frac{x}{a} + \lambda l - n \right\rfloor, a\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 \frac{x}{a} + \lambda l \rfloor} e_l(k, a).$$

*Dimostrazione.* Per la prima disuguaglianza, deduciamo dalla definizione di  $P_T^\nu(a)$  che

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} P_T^{\log_2(\frac{x}{a})-n}(a) = \{y \in P_T(a) : y \leq x\}.$$

Per ottenere la disuguaglianza basta applicare il teorema 1.5.6 a ogni termine. L'equazione segue dal riordino dei termini e dall'osservazione che  $e_l(k, a) = 0$  per  $k < 0$ .  $\square$

Per la stima nel corollario, è essenziale assumere che  $a$  non sia ciclico. Il seguente lemma mostra che, per ogni numero ciclico  $a$ , c'è un adeguato numero non ciclico  $\tilde{a}$ , il quale potrebbe servire in vari contesti come un sostituto per  $a$ .

**Lemma 1.5.8.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$  ciclico nel grafo di Collatz  $\Gamma_T$ . Allora c'è un numero  $\tilde{a} \in \mathbb{N}$  con le seguenti proprietà:*

(a)  $\tilde{a}$  è non ciclico,

$$(b) \ P_T(\tilde{a}) \subset P_T(a),$$

$$(c) \ \tilde{a} \not\equiv 0 \pmod{3},$$

$$(d) \ a \leq \tilde{a} \leq 16a.$$

*Dimostrazione.* Se  $a \equiv 0 \pmod{3}$ , allora sappiamo già che  $P_T(a) = \{2^k a : k \in \mathbb{N}_0\}$ ; ma questo non può essere vero perché abbiamo supposto  $a$  ciclico, quindi  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Adesso la strategia è di passare attraverso le possibili classi di resto  $a \pmod{9}$ .

Per ogni  $a \pmod{9}$  calcoliamo due predecessori  $x, y \in P_T(a)$ , i quali soddisfano le condizioni (b), (c) e (d), le quali appartengono a diversi rami di  $P_T(a)$ .

Ciò implica, che in ogni caso o  $x$  o  $y$  sia non ciclico.

$a \equiv 1, 4 \pmod{9}$  : poniamo  $x := \frac{1}{3}(4a - 1)$  e  $y := 4a$ . Allora  $\tilde{a} = x$  e  $\tilde{a} = y$  entrambe soddisfano (b), (c), (d) e abbiamo  $T(x) = 2a = T(y)$  il quale implica che almeno uno dei due numeri  $x, y$  dev'essere non ciclico (altrimenti avrebbe dovuto appartenere a un ciclo, il che è impossibile, siccome nessuno dei due è un predecessore dell'altro). Scegliendo  $\tilde{a} \in \{x, y\}$  non ciclico, siamo a posto.

$a \equiv 2, 8 \pmod{9}$  : poniamo  $x := \frac{2}{3}(2a - 1)$  e  $y := 2a$ . Ancora  $\tilde{a} = x$  e  $\tilde{a} = y$ , entrambe soddisfano (b), (c) e (d). Qui abbiamo  $T^2(x) = a = T(y)$ , implica che o  $x$  o  $y$  è non ciclico.

$a \equiv 5 \pmod{9}$ : poniamo  $x := \frac{1}{3}(8a - 1)$  e  $y := 8a$ . Qui abbiamo  $T(x) = 4a = T(y)$ . (La scelta  $x := \frac{1}{3}(2a - 1)$  non è possibile, in quanto avremo che  $a \equiv 0 \pmod{3}$ ).

$a \equiv 7 \pmod{9}$ : poniamo  $x := \frac{1}{3}(16a - 1)$  e  $y := 16a$ . Qui abbiamo  $T(x) = 8a = T(y)$ ; come negli altri casi, questo implica ch'è possibile scegliere un  $\tilde{a} \in \{x, y\}$  non ciclico, questo completa la dimostrazione.  $\square$

### 1.5.3 L'errore della stima

Cosa sappiamo dell'errore nella stima del teorema 1.5.6? L'errore assoluto è dovuto alla suriettività della mappa  $i_\nu$ , cioè la cardinalità di  $P_T^\nu(a) \setminus$

$i_\nu(\xi^\nu(a))$ . Facciamo un ulteriore passo per stimare l'errore.

**Lemma 1.5.9.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$  non ciclico in  $\Gamma_T$ , e sia  $\nu \in \mathbb{R}$ . Allora*

$$P_T^\nu \setminus i_\nu(\xi^\nu(a)) = \{v_t(a) \in P_T^\nu(a) : t = (t_0, \dots, t_l) \in \xi(a), c(t) > 2^{\nu+t_0}\}.$$

*Dimostrazione.* Il lemma segue dal seguente insieme di equazioni

$$i_\nu(\xi^\nu(a)) = \{v_t(a) \in P_T^\nu(a) : t \in \xi(a), c(t) \leq 2^{\nu+t_0}\}. \quad (1.4)$$

Per provare la parte ' $\subset$ ', sia  $s \in \xi^\nu(a)$ , allora  $t := i_\nu(s) = (\beta_\nu(s)) \cdot s$ , dove  $\beta_\nu(s)$  è scelto tale che  $v_t(a) \in P_T^\nu(a)$ . Da

$$t = (t_0, \dots, t_l) = (\beta_\nu(s) + s_0, s_1, \dots, s_l) \in \mathcal{F}$$

deduciamo che  $\beta_\nu(s) \leq t_0$ , questo implica che  $c(t) = 2^{\beta_\nu(s)}c(s) \leq 2^{\nu+\beta_\nu(s)} \leq 2^{\nu+t_0}$ . Resta da mostrare ' $\supset$ ' di 1.4. Sia  $t = (t_0, \dots, t_l) \in \xi(a)$  tale che soddisfi sia  $v_t(a) \in P_T^\nu(a)$  che  $c(t) \leq 2^{\nu+t_0}$ . La prima condizione ci dice che

$$v_t(a) = c(t)a - r(t) > 2^{\nu-1}(a),$$

la quale combinata con la seconda condizione ci dice che

$$2^{\nu-1} < c(t) \leq 2^{\nu+t_0}. \quad (1.5)$$

Adesso dobbiamo trovare  $s \in \xi^\nu(a)$  tale che  $i_\nu(s) = (\beta_\nu(s)) \cdot s = t$ . Dall'equazione 1.2, sappiamo che questa  $s$  deve soddisfare la condizione

$$2^{\nu-1} < c(s) = 2^{-\beta_\nu(s)}c(t) \leq 2^\nu \iff 2^{\beta_\nu(s)-1} < \frac{c(t)}{2^\nu} \leq 2^{\beta_\nu(s)}$$

$$\iff \beta_\nu(s) < \log_2 c(t) - \nu \leq \beta_\nu(s) \iff \beta_\nu(s) = \lceil \log_2 c(t) \rceil$$

Ma 1.5 implica  $\log_2 c(t) > \nu - 1$ , da cui  $0 \leq \beta_\nu \leq t_0$ . □

*Osservazione 7.* La formula del lemma 1.5.9 per l'insieme  $P_T^\nu(a) \setminus i_\nu(\xi^\nu(a))$  è difficile da valutare. Infatti, inserendo la definizione di  $P_T^\nu(a)$  nel membro destro si ha

$$P_T^\nu \setminus i_\nu(\xi^\nu(a)) = \left\{ v_t(a) : t \in \xi(a), \max \left\{ 2^{\nu-1} + \frac{r(t)}{a}, 2^{\nu+t_0} \right\} < c(t) \leq 2^\nu + \frac{r(t)}{a} \right\}.$$

## 1.6 Alcune limitazioni agli insiemi dei predecessori

Per notare altre caratteristiche del grafo di Collatz, descriviamo alcune speciali funzioni di conteggio e le relazioni tra loro e con la funzione  $e_l(k, a)$ . La prima riguarda il conteggio dei predecessori dispari e la seconda è associata a un interessante sottografo del grafo di Collatz: il grafo ridotto di Collatz.

### 1.6.1 I predecessori dispari

A volte è meglio limitare l'attenzione ai vertici dispari del grafo di Collatz; vediamo che succede se lo facciamo.

Sia  $a \in \mathbb{N}$  e sia  $s = (s_0, \dots, s_l) \in \xi(a)$ . Dalla definizione 1.13, otteniamo immediatamente

$$v_s(a) \equiv 1 \pmod{2} \iff s_0 = 0$$

Da ciò segue subito

**Definizione 1.19.** Dato  $a \in \mathbb{N}$ , l'insieme dei predecessori dispari è dato da:

$$P_T^o(a) := \{n \in P_T(a) : n \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

Un vettore possibile  $s = (s_0, \dots, s_l)$  è detto *basilare*, se  $s_0 = 0$ . L'insieme dei *vettori possibili basilari* per quanto riguarda  $a$  è

$$\xi^o(a) := \{(s_0, \dots, s_l) \in \xi(a) : s_0 = 0\} = \{s \in \xi(a) : v_s(a) \text{ e' dispari}\}.$$

Dati  $l, k \in \mathbb{N}_0$ , usando la notazione precedente abbiamo:

$$\xi_{l,k}^o(a) := \{s \in \xi^o(a) : l(s) = l, |s| = k\} = \xi_{l,k}(a) \cap \xi^o(a).$$

Fissato  $l \in \mathbb{N}_0$ , la *funzione di conteggio dispari* è

$$e_l^o : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad e_l^o(k, a) := |\xi_{l,k}^o(a)|.$$

Abbiamo osservato che quello che succede per  $l = 0$  è:

$$\xi_{0,k}^o(a) = \begin{cases} \{(0)\} & \text{se } k = 0 \text{ e } a \equiv 1 \pmod{2} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Così abbiamo già notato la relazione tra  $e_l(k, a)$  e  $e_l^o(k, a)$

**Lemma 1.6.1.** *Dati  $a \in \mathbb{N}$  e  $l, k \in \mathbb{N}_0$ , abbiamo che  $e_l(k, a) = \sum_{j=0}^k e_l^o(j, a)$ .*

*Dimostrazione.* La seguente mappa

$$\xi_{l,k}(a) \rightarrow \bigcup_{j=0}^k \xi_{l,j}^o(a), \quad (s_0, s_1, \dots, s_l) \mapsto (0, s_1, \dots, s_l)$$

è chiaramente una biezione, da cui la sua inversa è ottenuta ponendo  $s_0 := k - (s_1 + \dots + s_l)$ . Ora il lemma segue dalle definizioni di funzioni di conteggio.  $\square$

Il seguente teorema dà una stima della funzione di conteggio dell'insieme dei predecessori dispari la quale è simile al corollario 1.5.7

**Teorema 1.6.2.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$  non ciclico nel grafo di Collatz  $\Gamma_T$ , posto  $\lambda = \log_2 3 - 1$ . Allora, per ogni  $x > 0$  reale,*

$$Z_{P_T^o(a)}(x) \geq \sum_{l=0}^{\infty} e_l \left( \lfloor \log_2 \frac{x}{a} + \lambda l \rfloor, a \right).$$

*Dimostrazione.* Per ogni vettore ammissibile  $s \in \xi_{l,j}(a)$ , il lemma 1.3.7 ci dice che

$$v_s(a) = c(s)a - r(s) \leq c(s)a = \frac{2^{l+j}a}{3^l}$$

per il fatto che  $r(s) \geq 0$  (dalla definizione 1.14). Dal calcolo

$$\frac{2^{l+j}a}{3^l} \leq x \iff 2^j \leq \frac{x}{a} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^l \iff j \leq \log_2 \frac{x}{a} + l \cdot \log_2 \frac{3}{2}$$

deduciamo che  $v_s(a) \leq x$  ogni volta che  $j \leq \log_2(\frac{x}{a}) + \lambda l$ . Se  $a \in \mathbb{N}$  non è ciclico, sappiamo dal teorema 1.3.12 che la mappa  $s \mapsto v_s(a)$  è iniettiva. Così,

$$Z_{P_T^o(a)} = |\{n \in P_T^o(a) : n \leq x\}| \geq \left| \bigcup \left\{ \xi_{l,j}^o(a) : j \leq \log_2 \frac{x}{a} + \lambda l \right\} \right|$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \log_2(\frac{x}{a}) + \lambda l \rfloor} e_l^o(j, a) = \sum_{l=0}^{\infty} e_l \left( \lfloor \log_2 \frac{x}{a} + \lambda l \rfloor, a \right),$$

dove abbiamo usato il lemma 1.6.1 nell'ultimo passo.  $\square$

### 1.6.2 Il grafo di Collatz ridotto

Consideriamo l'insieme dei predecessori  $P_T(a)$  per  $a \in \mathbb{N}$ . Sappiamo già alcune cose sulla struttura del sottografo completo  $P(a) := \langle P_T(a) \rangle_T$  del grafo di Collatz  $\Gamma_T$  generato da  $P_T(a)$ :

- (1)  $P(a)$  è un albero, se e solo se  $a$  è non ciclico.
- (2)  $P(a)$  è semplicemente una retta infinita con  $a$  come vertice finale, se e solo se  $a \equiv 0 \pmod{3}$ .

Il primo fatto significa che possiamo tranquillamente limitare la nostra attenzione ad alberi, siccome i numeri non ciclici sono molti (possiamo anche creare un albero da ogni  $P_T(a)$ , cancellando l'arco del vertice iniziale  $a$ , se presente).

Il secondo fatto implica che ci sono due strutture di  $P_T(a)$ , che dipendono dal fatto che  $a$  sia o non sia divisibile per 3. Questo ci porta all'idea di Lagarias e Weiss di *ridurre* l'albero  $3n + 1$  tagliando via i vertici che sono divisibili per 3. Più precisamente: presi i predecessori di 1,  $P_T(1) \subset \mathbb{N}$ , formiamo il sottografo completo del grafo di Collatz  $\Gamma_T$  generato da loro (il quale secondo la congettura è l'intero grafo di  $\Gamma_T$ ) e rimuoviamo l'arco  $(1, 2)$  per ottenere  $\mathcal{T} = (V, E)$  con vertici  $V := P_T(1)$  e archi  $E := \{(n, T(n)) : n \in V, n \neq 1\}$ . Adesso l'albero ridotto è definito come  $T^* = (V^*, E^*)$  con vertici

$$V^* := \{n \in P_T(1) : n \not\equiv 0 \pmod{3}\}$$

e archi

$$E^* := \{(n, T(n)) : n \in V^*, n \neq 1\}.$$

Nella nostra impostazione, è appropriata la seguente definizione:

**Definizione 1.20.** Il grafo di Collatz ridotto  $\Gamma_T^* = (V_T^*, E_T^*)$  è costruito rimuovendo tutti i vertici del grafo di Collatz  $\Gamma_T$  che sono divisibili per 3, e i loro archi adiacenti.

Quindi  $V_T^* = \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ , così  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  chiaramente implica  $T(n) \not\equiv 0 \pmod{3}$ , l'insieme degli archi è semplicemente  $E_T^* = \{(n, T(n)) : n \in V_T^*\}$ .

**Definizione 1.21.** Dato  $a \in V_T^* = \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ , l'insieme ridotto dei predecessori è dato da

$$P_T^*(a) = \{n \in P_T(a) : n \not\equiv 0 \pmod{3}\} = P_T(a) \cap V_T^*.$$

### 1.6.3 Funzioni di conteggio ridotte

Il nostro prossimo obiettivo è quello di costruire funzioni di conteggio che sono connesse agli insiemi ridotti dei predecessori  $P_T^*(a)$ , nello stesso modo in cui le funzioni di conteggio  $e_l(k, a)$  sono connesse agli insiemi dei predecessori  $P_T(a)$ .

**Definizione 1.22.** Sia  $a \in \mathbb{N}$ , l'insieme dei vettori ammissibili del grafo ridotto di Collatz per quanto riguarda  $a$  è

$$\xi^*(a) := \{s \in \xi(a) : v_s(a) \not\equiv 0 \pmod{3}\}.$$

Dati  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , usiamo ancora la seguente notazione

$$\xi_{l,k}^*(a) := \{s \in \xi^*(a) : l(s) = l, |s| = k\} = \xi_{l,k}(a) \cap \xi^*(a).$$

Fissato  $l \in \mathbb{N}_0$ , la *funzione di conteggio ridotta* è

$$e_l^* : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad e_l^*(k, a) := |\xi_{k,l}^*(a)|.$$

Le proprietà di base di  $e_l^*(k, a)$  sono simili a quelle di  $e_l(k, a)$  con qualche significativa differenza.

**Lemma 1.6.3.** *Dati  $a, b \in \mathbb{N}$  e  $j, k, l \in \mathbb{N}_0$ , abbiamo*

(a) Se  $a \equiv 0 \pmod{3}$ , allora  $e_l^*(k, a) = 0$ .

(b) Se  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ , allora  $e_0^*(k, a) = 1$ .

(c) Se  $k \geq j$ , allora  $e_l(k, a) \geq e_l^*(k, a) \geq e_l(j, a)$ .

(d) Se  $a \equiv b \pmod{3^{l+1}}$ , allora  $e_l^*(k, a) = e_l^*(k, b)$ .

*Dimostrazione.* (a) segue dal corollario 1.4.5. Se  $a \equiv 0 \pmod{3}$ , allora  $\xi(a) = \{(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$ . Poiché  $v_{(k)}(a) = 2^k a \equiv 0 \pmod{3}$ , questo implica

$$\xi^*(a) = \{s \in \xi(a) : v_s(a) \not\equiv 0 \pmod{3}\} = \emptyset.$$

(b) se  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ , abbiamo  $\xi_{0,k}(a) = \{(k)\} = \xi_{l,k}^*(a)$ .

(c) segue dalla definizione di  $\xi^*(a)$  e dalla parte (b) del lemma 1.5.1. Per provare (d), consideriamo  $z \in \mathbb{N}$  e  $j \in \{1, 2\}$ , allora gli insiemi

$$\xi_{l,k}^{*j}(x) := \{s \in \xi_{l,k}(x) : v_s(x) \equiv j \pmod{3}\},$$

$$\xi_{l+1,k+1}^{o1}(x) := \{s \in \xi_{l+1,k+1}^o(x) : s_1 \geq 1\}.$$

Abbiamo delle biezioni

$$\xi_{l,k}^{*1}(x) \leftrightarrow \xi_{l+1,k+1}^{o1}(x), \quad s \leftrightarrow (0, 1) \cdot s,$$

e

$$\xi_{l,k}^{*2}(x) \leftrightarrow \xi_{l+1,k}^o(x), \quad s \leftrightarrow (0, 0) \cdot s,$$

Se  $a \equiv b \pmod{3^{l+1}}$ , applico il lemma 1.4.1 per mostrare che  $\xi_{l+1,k+1}^{o1}(a) = \xi_{l+1,k+1}^{o1}(b)$  e  $\xi_{l+1,k}^o(a) = \xi_{l+1,k}^o(b)$ . Insieme con le biezioni dette sopra, questo prova le seguenti equazioni cardinali

$$|\xi_{l,k}^{*1}(a)| = |\xi_{l,k}^{*1}(b)| \quad e \quad |\xi_{l,k}^{*2}(a)| = |\xi_{l,k}^{*2}(b)|.$$

Adesso la decomposizione in insiemi disgiunti  $\xi_{l,k}^*(x) = \xi_{l,k}^{*1}(x) \cup \xi_{l,k}^{*2}(x)$ , applicata per  $x = a$  e  $x = b$ , completa la dimostrazione.  $\square$



Le relazioni di base tra il numero dei predecessori nel grafo di Collatz ridotto e le funzioni di conteggio ridotte è dato dal seguente risultato:

**Teorema 1.6.4.** *Sia  $a \in \mathbb{N}$  non ciclico nel grafo di Collatz ridotto  $\Gamma_T^*$ , posto  $\lambda = \log_2 3 - 1$ . Allora, per ogni  $x > 0$  reale,*

$$Z_{P_T^*}(x) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2(\frac{x}{a}) + \lambda t \rfloor} e_l^*(k, a).$$

*Dimostrazione.* Un controllo delle dimostrazioni del lemma 1.5.5, del teorema 1.5.6 e del corollario 1.5.7 mostra che questi risultati rimangono validi se il grafo di Collatz  $\Gamma_T$  è sostituito con il grafo di Collatz ridotto  $\Gamma_T^*$ . Il teorema in questione è solo una 'restrizione' del corollario 1.5.7.  $\square$

### 1.6.4 Costruzione induttiva delle funzioni di conteggio ridotte

In base al lemma 1.5.2, le solite funzioni di conteggio  $e_l$  possono essere generate per induzione su  $l$ . La costruzione è valida anche per le funzioni di conteggio ridotte  $e_l^*$ , l'unica differenza è dovuta al fatto che i valori iniziali  $e_0^*(k, a)$  e  $e_0(k, a)$  non coincidono per  $a \equiv 0 \pmod{3}$ .

**Lemma 1.6.5.** *Siano  $a \in \mathbb{N}$  e  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , posto  $e_l^*(j, q) := 0$  per  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $q \in (\frac{1}{3}\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}$ . Allora*

$$e_{l+1}^*(k, a) = \sum_{j=0}^k e_l^* \left( k - j, \frac{2^{j+1}a - 1}{3} \right).$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è quasi la stessa del lemma 1.5.2. Per prima cosa estendiamo la notazione della definizione 1.21 con l'aggiunta di  $\xi_{l,j}^*(q) := \emptyset$  per  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $q \in (\frac{1}{3}\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{Z}$ . Allora c'è una corrispondenza biunivoca

$$\xi_{l+1,k}^*(a) \leftrightarrow \bigcup_{j=0}^k \xi_{l,k-j}^* \left( \frac{2^{j+1}a - 1}{3} \right),$$

dove l'unione è disgiunta. Qui un vettore

$$(s_0, \dots, s_l, j) \in \xi_{l+1,k}^*(a)$$

corrisponde in modo unico a un vettore

$$(s_0, \dots, s_l) \in \xi_{l,k-j}^*(v_{(0,j)}(a)) = \xi_{l,k-j}^*\left(\frac{2^{j+1}a-1}{3}\right),$$

e viceversa. Ora il lemma segue dalla definizione 1.21.  $\square$

Quindi è possibile costruire induttivamente i valori di  $e_l^*(k, a)$ , senza far riferimento al grafo di Collatz ridotto.

**Corollario 1.6.6.** *La successione delle funzioni di conteggio ridotte  $(e_l^*)_{l \in \mathbb{N}_0}$  è unicamente determinata da*

$$(1) \quad e_0^*(k, a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \equiv 0 \pmod{3} \text{ oppure } a \in \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^\nu} \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{se } a \equiv 1 \pmod{3} \text{ oppure } a \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$(2) \quad e_{l+1}^*(k, a) = \sum_{j=0}^k e_l^*\left(k-j, \frac{2^{j+1}a-1}{3}\right) \quad \text{per } l \in \mathbb{N}_0.$$

### 1.6.5 I predecessori dispari nel grafo di Collatz ridotto

Ci sono situazioni in cui è meglio considerare i predecessori dispari del grafo di Collatz ridotto.

**Definizione 1.23.** Sia  $a \in \mathbb{N}$ , l'insieme dei vettori di base ammissibili del grafo di Collatz ridotto per quanto riguarda  $a$ , è

$$\xi^{o*}(a) := \xi^o(a) \cap \xi^*(a) = \{s \in \xi(a) : v_s(a) \equiv 1, 5 \pmod{6}\}.$$

Inoltre, dati  $l, k \in \mathbb{N}_0$  poniamo

$$\xi_{l,k}^{o*}(a) := \xi_{l,k}(a) \cap \xi^{o*}(a).$$

Fissato  $l \in \mathbb{N}_0$ , la funzione di conteggio ridotta e dispari è

$$e_l^{o*} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad e_l^{o*}(k, a) := |\xi_{l,k}^{o*}(a)|.$$

**Lemma 1.6.7.** *Siano  $a \in \mathbb{N}$  e  $l, k \in \mathbb{N}_0$ .*

(a) *La mappa*

$$\xi_{l,k}^*(a) \longrightarrow \bigcup_{j=0}^k \xi_{l,j}^{o*}(a), \quad (s_0, s_1, \dots, s_l) \mapsto (0, s_1, \dots, s_l),$$

*è una biezione.*

(b)

$$e_l^*(k, a) = \sum_{j=0}^k e_l^{o*}(j, a).$$

*Dimostrazione.* Come nel lemma 1.6.1 □

**Lemma 1.6.8.** *Siano  $a \in \mathbb{N}$  e  $j, l, x \in \mathbb{N}_0$  con  $j < l$ . Allora*

$$e_l(x, a) = \sum_{k=0}^x \sum_{s \in \xi_{j,l}^{o*}(a)} e_{l-j}(x-k, v_s(a)).$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $e_l(x, a) = |\xi_{l,x}(a)|$ , sia  $t = (t_0, \dots, t_l) \in \xi_{l,x}(a)$ . Dalla nostra concatenazione di vettori, possiamo scrivere

$$(t_0, \dots, t_l) = (t_0, \dots, t_{l-j}) \cdot (0, t_{l-j+1}, \dots, t_l).$$

Dato  $s := (0, t_{l-j+1}, \dots, t_l)$ , indica l'ultimo vettore e posto  $k := |s|$  (il che implica  $0 \leq k \leq x$ ). Dalla definizione 1.15 e dal corollario 1.3.5, notiamo che

$$s \in \xi_{j,k}^o(a) \quad e \quad (t_0, \dots, t_{l-j}) \in \xi_{l-j,x-k}(v_s(a)).$$

Inoltre, qualsiasi intero  $k \in \{0, \dots, x\}$  e qualsiasi coppia di vettori possibili  $(r, s)$  con  $s \in \xi_{j,k}^o(a)$  e  $r \in \xi_{l-j,x-k}(v_s(a))$  genera un vettore ammissibile  $t := r \cdot s \in \xi_{l,x}(a)$ . Questo stabilisce la seguente corrispondenza biunivoca:

$$\xi_{l,x}(a) \leftrightarrow \bigcup_{k=0}^x \bigcup_{s \in \xi_{j,k}^o(a)} \xi_{l-j,x-k}(v_s(a)), \quad (1.6)$$

dove l'unione è chiaramente disgiunta. Nell'ultima unione, possiamo sostituire  $\xi_{j,k}^o(a)$  con  $\xi_{j,k}^{o*}(a)$ , per il seguente motivo: sia  $s \in \xi_{j,k}^o(a) \setminus \xi_{j,k}^{o*}(a)$ , allora

dalla definizione 1.22,  $v_s(a) \equiv 0 \pmod{3}$ . Dal corollario 1.4.5 concludiamo che  $\xi_{l-j, x-k}(v_s(a)) = \emptyset$ , così assumiamo che  $l - j \geq 1$ . Questo completa la dimostrazione della formula di somma.  $\square$

## 1.7 Il miglior approccio

In questa sezione faremo un preciso confronto fra la nostra notazione e quella di un articolo che riguarda il 'metodo di ricerca sull'albero'. Il termine 'metodo di ricerca sull'albero' è stato utilizzato da Applegate e Lagarias per fare riferimento a un metodo per derivare stime della densità per gli insiemi dei predecessori, a partire dal numero dei vertici del grafo di Collatz. Vedremo che le prossime stime sono costruite a partire da una stima di:

$$\min_{a \in \mathbb{N}, 3 \nmid a} e_l^*(k, a) \quad \text{per un numero sufficiente di indici } k, l. \quad (1.7)$$

Per chiarire le implicazioni di questo fatto, introduciamo una appropriata nozione di 'limite uniforme' e concludiamo che quelli che sono stati trovati dalla ricerca sull'albero sono *limiti inferiori uniformi*.

### 1.7.1 Limiti uniformi

Le stime della densità degli insiemi dei predecessori che sono qui esposte, sono derivate attraverso la stima di serie come quella del teorema 1.6.2

$$Z_{P_T^o(a)}(x) \geq \sum_{l=0}^{\infty} e_l \left( \lfloor \log_2 \frac{x}{a} + \lambda l \rfloor, a \right).$$

Il termine di destra dipende da  $x$  solo attraverso il quoziente  $\frac{x}{a}$ . Questo motiva la seguente definizione, che diamo in modo astratto.

**Definizione 1.24.** Sia  $U \subset \mathbb{N}$ , considero una famiglia  $(S(a))_{a \in U}$  di sottoinsiemi  $S(a) \subset \mathbb{N}$ . Una funzione  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  è detta *limite inferiore uniforme* per la famiglia  $(S(a))_{a \in U}$ , se c'è una costante reale  $\xi_0 > 0$  tale che

$$Z_{S(a)}(x) \geq \phi \left( \frac{x}{a} \right) \quad \text{ogni volta che } \frac{x}{a} \geq \xi_0.$$

allo stesso modo,  $\phi$  è detto *limite superiore uniforme* per la famiglia  $(S(a))_{a \in U}$ , se c'è una costante reale  $\xi_0 > 0$  tale che

$$Z_{S(a)}(x) \leq \phi\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{ogni volta che } \frac{x}{a} \geq \xi_0.$$

*Osservazione 8.* Le condizioni imposte su  $\phi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  in questa definizione, possono essere riscritte così:  $\phi$  è un limite inferiore uniforme per una famiglia  $(S(a))_{a \in U}$ , se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \inf \left( \inf_{a \in U} \frac{Z_{S(a)}(ax)}{\phi(x)} \right) \geq 1;$$

è facile vedere che si ottiene sostituendo  $\frac{x}{a}$  con  $x$  nella definizione. Allo stesso modo  $\phi$  è un limite superiore uniforme per una famiglia  $(S(a))_{a \in U}$ , se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \left( \sup_{a \in U} \frac{Z_{S(a)}(ax)}{\phi(x)} \right) \leq 1.$$

Noi siamo particolarmente interessati ai limiti inferiori uniformi del tipo  $\phi(\xi) = \xi^c$ , dove  $c$  è una costante che soddisfa  $0 < c < 1$ , per la famiglia degli insiemi di predecessori dispari

$$(P_T^o(a))_{a \in U} \quad \text{dove } U = \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}.$$

I limiti inferiori uniformi per le famiglie più piccole  $(P_T^o(a))_{a \in V}$ , dove  $V \subset U$  è il sottoinsieme dei numeri non ciclici, sarà derivato dalla stima del minimo di 1.7. Il seguente lemma mostra che, al fine di ottenere un limite inferiore uniforme del tipo  $\phi_0(\xi) = \xi^c$  per la famiglia indicizzata da  $U$  è sufficiente avere un limite inferiore uniforme  $\phi_1(\xi) = \xi^{c+\epsilon}$  leggermente più grande, per le famiglie più piccole indicizzate dal sottoinsieme  $V$  di numeri non ciclici.

**Lemma 1.7.1.** *Sia  $P$  uno dei tre 'operatori dell'insieme dei predecessori'  $P_T, P_T^o, P_T^*$ , e siano  $c, \epsilon \in \mathbb{R}$  tali che  $0 < c < 1$  e  $\epsilon > 0$ , sia  $\phi_1(\xi) = \xi^{c+\epsilon}$  un limite inferiore uniforme per la famiglia*

$$(P(a))_{a \in V} \quad \text{dove } V = \{a \in \mathbb{N} : a \not\equiv 0 \pmod{3}, a \text{ non e' ciclico}\}.$$

*Allora  $\phi_0(\xi) = \xi^c$  è un limite inferiore uniforme per la famiglia più grande  $(P(a))_{a \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}}$ .*

*Dimostrazione.* Posto  $U := \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ , per ogni numero ciclico  $a \in U$ , sappiamo dal lemma 1.5.8 che c'è un numero non ciclico  $\tilde{a} \in U$  che soddisfa le seguenti condizioni

$$a \leq \tilde{a} \leq 16a \quad e \quad P_T(\tilde{a}) \subset P_T(a).$$

Per ogni  $b \in \mathbb{N}$  abbiamo  $P_T^o(b) = P_T(b) \cap (\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N})$  e  $P_T^*(b) = P_T(b) \cap (\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N})$ . Questo significa che  $\tilde{a}$  soddisfa le condizioni

$$a \leq \tilde{a} \leq 16a \quad e \quad P(\tilde{a}) \subset P(a),$$

per ogni operatore dell'insieme dei predecessori  $P \in \{P_T, P_T^o, P_T^*\}$ . Tenendo conto dell'assunzione che  $\phi_1(\xi) = \xi^{c+\epsilon}$  è un limite inferiore uniforme per la famiglia più piccola che ha come indici i numeri non ciclici, deduciamo che, per ogni numero ciclico  $a \in U$  e ogni  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$Z_{P(a)}(x) \geq Z_{P(\tilde{a})}(x) \geq \left(\frac{x}{\tilde{a}}\right)^{c+\epsilon} \quad \text{ogni volta che } \frac{x}{\tilde{a}} \geq \xi_0.$$

Posta  $C$  una costante reale positiva, questo implica che,

$$Z_{P(a)}(x) \geq \left(\frac{x}{a}\right)^c \quad \text{ogni volta che } \frac{x}{a} \geq C \cdot \xi_0,$$

il che completa la dimostrazione.  $\square$

### 1.7.2 I vettori minoranti di Applegate e Lagarias

Questo approccio è molto diverso dai precedenti che c'erano stati fino ad allora, infatti stimarono somme del tipo

$$\sum_{l \geq \mu j} e_l^*(j - l, a)$$

dove  $j \in \mathbb{N}$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  con  $0 < \mu < \frac{\log 2}{\log 3}$ , sono fissati.

Per prima cosa consideriamo il seguente sottografo del grafo ridotto di Collatz. Dati  $k, a \in \mathbb{N}$  sia  $\mathcal{T}_k^*(a)$  il sottografo completo di  $\Gamma_T^*$ , generato dall'insieme di vertici

$$\mathcal{V}_k^*(a) := \{x \in \mathbb{N} : T^j(x) = a \text{ per qualche } j \leq k\},$$

dove  $T$  è ovviamente la funzione  $3n + 1$ . Inoltre utilizzando la nostra notazione, abbiamo che:

$$\mathcal{V}_k^*(a) = \{v_s(a) : s \in \xi^*(a), \|s\| \leq k\}.$$

Notiamo che  $\mathcal{T}_k^*(a)$  è un albero, se e solo  $a$  non è ciclico.

Il prossimo passo è associare un *peso* a ogni vertice  $\mathcal{T}_k^*(a)$  tale che la funzione  $peso(x)$  conti gli archi del cammino da  $x$  ad  $a$ , i quali sono generati da un ramo dispari della funzione  $T$ . Quindi per una foglia  $x = v_s(a)$  con  $T^k(x) = a$ , abbiamo

$$peso(x) = peso(v_s(a)) = l(s).$$

Il collegamento agli insiemi dei predecessori, si deriva attraverso gli insiemi

$$\begin{aligned} V_j^*(a, \mu) &:= \{x \in \mathbb{N} : T^j(x) = a, peso(x) \geq \mu j\} \\ &= \{v_s(a) : s \in \xi^*(a), \|s\| \leq k\}, \end{aligned}$$

dove  $\mu$  sarà un numero reale, scelto in modo tale che  $0 < \mu < \frac{\log 2}{\log 3}$ . Supponiamo che  $a$  non sia ciclico, allora la cardinalità di un tale insieme è

$$N_j^*(a, \mu) := |V_j^*(a, \mu)| = \sum_{l \geq \mu j} e_l^*(j - l, a).$$

Dato  $x = v_s(a) \in V_j^*(a, \mu)$ , concludiamo dal lemma 1.3.7 che

$$\frac{x}{a} = \frac{v_s(a)}{a} \leq c(s) = \frac{2^j}{3^{l(s)}} \leq 2^j \cdot 3^{-\mu j} = \exp(j(\log 2 - \mu \log 3)),$$

Per un qualsiasi  $x$  predecessore di  $a$ , nel grafo ridotto di Collatz, cioè per  $x \in P_T^*(a)$ , poniamo

$$j(x) := \left\lfloor \frac{1}{\log 2 - \mu \log 3} \cdot \log \frac{x}{a} \right\rfloor.$$

Se  $2 \cdot 3^{-\mu} > 1$  (c'è soltanto la restrizione su  $\mu$  che abbiamo detto prima), abbiamo

$$\frac{y}{a} \leq (2 \cdot 3^{-\mu})^{j(x)} \leq \frac{x}{a} \leq (2 \cdot 3^{-\mu})^{j(x)+1} \quad \text{per } y \in V_{j(x)}^*(a, \mu),$$

che implica  $Z_{P_T^*(a)}(x) \leq N_{j(x)}^*(a, \mu)$ . Per avere una stima, definiamo  $\gamma(x)$  nel modo seguente

$$N_{j(x)}^*(a, \mu) = (2 \cdot 3^{-\mu})^{(j(x)+1)\gamma(x)} \geq \left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma(x)}.$$

Chiaramente

$$\gamma(x) := \frac{1}{\log 2 - \mu \log 3} \cdot \frac{1}{j(x) + 1} \log N_{j(x)}^*(a, \mu)$$

è quello che fa al caso nostro; se  $x \rightarrow \infty$ , allora  $j(x) \rightarrow \infty$  e

$$\gamma_0 := \frac{1}{\log 2 - \mu \log 3} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \left( \inf_{a \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}} \log N_j^*(a, \mu) \right) \quad (1.8)$$

ha la proprietà che, per ogni  $\epsilon > 0$ , c'è un  $\xi_0(\epsilon) > 0$  tale che, per  $x \in \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$  non ciclico,

$$Z_{P_T^*(a)}(x) \geq \left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma_0 - \epsilon} \quad \text{ogni volta che } \frac{x}{a} \geq \xi_0(\epsilon).$$

In altre parole: ogni numero reale  $\gamma < \gamma_0$  genera un limite inferiore uniforme  $\phi(\xi) = \xi^\gamma$  (nel senso della definizione 1.24) per la famiglia di insiemi dei predecessori  $\{P_T^*(a) : a \in \mathbb{N} : a \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N} \text{ non e' ciclico}\}$ . Usando il lemma 1.7.1, deduciamo che, per ogni  $\gamma < \gamma_0$ ,  $\phi(\xi) = \xi^\gamma$  è un limite uniforme inferiore per la famiglia  $\{P_T^*(a) : a \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}\}$ .

Per la costruzione di un limite inferiore per  $\gamma_0$ , introduciamo le funzioni conteggio del peso (per  $a$  non ciclico)

$$w_j^k(a) := |\{x \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N} : T^k(x) = a, \text{ peso}(x) = j\}|$$

$$|\{v_s(a) : s \in \xi^*(a), ||s|| = k, l(s) = j\}| = |\xi_{j, k-j}^*(a)| = e_j^*(k - j, a),$$

che porta ad avere il vettore dei pesi

$$w_k^*(a) := (w_0^k(a), \dots, w_k^k(a)) = (e_0^*(k, a), e_1^*(k - 1, a), \dots, e_k^*(0, a)).$$

Un vettore  $w = (w_0, \dots, w_k)$  è detto *minorante* di un altro vettore  $w' = (w'_0, \dots, w'_k)$  se

$$\sum_{j=0}^i w_{k-j} \leq \sum_{j=0}^i w'_{k-j} \quad \text{per } 0 \leq i \leq k.$$



Il vettore dei minoranti

$$w^-(k) := (w_0^-(k), \dots, w_k^-(k))$$

è determinato dalle condizioni

$$\sum_{j=0}^i w_{k-j}^-(k) = \min_{a \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=0}^i e_{k-j}^*(j, a) \right\} \quad \text{per } 0 \leq j \leq k.$$

Osserviamo che dal lemma 1.6.3 sappiamo che  $e_{k-j}^*(j, a)$  dipende solo dalla classe di resto di  $a$  modulo  $3^{k-j+1}$ , quindi è sufficiente prendere il minimo sugli insiemi finiti

$$A_{k+1}^* := \{0 < a < 3^{k+1}, a \not\equiv 0 \pmod{3}\}.$$

Il prossimo passo consiste nell'utilizzare esplicitamente il fatto che il sotto albero è stato scelto dal grafo ridotto di Collatz. Supponiamo che si abbia un vettore di minoranti per alcuni  $k$ , ad esempio  $k = 30$  e supponiamo di sapere che tutti i possibili alberi  $\mathcal{T}_k^*(a)$ , in cui  $a$  attraversa l'insieme finito  $A_{k+1}^*$ . Allora si ha un albero  $\mathcal{T}_{2k}^*(a)$ , dovuto all'aver attaccato un albero  $\mathcal{T}_k^*(b)$  ad ogni foglia  $b$  di  $\mathcal{T}_k^*(a)$ . Inoltre è possibile calcolare un vettore che 'minorizza' il vettore dei minoranti per  $\mathcal{T}_{2k}^*(a)$ , utilizzando la *convoluzione*

$$w^-(k) * w^-(k) = (x_0^k(2), \dots, x_k^k(2)),$$

dove

$$x_i^k(2) = \sum_{i_1+i_2=i} w_{i_1}^-(k) w_{i_2}^-(k).$$

Iterando questo procedimento per  $j$  volte, è possibile ottenere un limite inferiore

$$\sum_{i > jk\mu} x_i^k(j) \leq N_{jk}^*(a, \mu), \quad (1.9)$$

che non dipende da  $a$ . La parte rimanente da' un limite inferiore  $\gamma_k$  per  $\gamma_0$  nell'equazione 1.8 ch'è dovuto alla ricerca di un modello stocastico. Il limite della somma 1.9 ha bisogno di una stima di 1.8 che sono state calcolate usando la 'grande deviazione dai limiti' di Chernoff.

Il metodo richiede molto l'uso del computer, infatti Applegate e Lagarias hanno costruito con il computer tutti i possibili alberi  $\mathcal{T}_k^*(a)$  per  $k = 1, \dots, 30$ , per ottenere il vettore dei minoranti per questi valori di  $k$ . Il risultato finale è  $\gamma_{30} = 0.6547$ , il quale dà un limite inferiore uniforme  $\phi(\xi) = \xi^{0.6547}$ , cioè c'è una costante  $\xi_0$  che dipende solo dalla costruzione ma non dipende da  $a$ , tale che

$$Z_{P_T^*(a)}(x) \geq \left(\frac{x}{a}\right)^{0.6547} \quad \text{per } x \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N} \text{ che soddisfa } \frac{x}{a} \geq \xi_0.$$

In questo modo abbiamo provato che il numero di interi positivi nell'intervallo  $[a, x]$ , i quali non sono multipli di 3 e incontrano  $a$  lungo la loro orbita, sono più di  $\left(\frac{x}{a}\right)^{0.6547}$ .

## Capitolo 2

# Sulla (non)-esistenza degli $m$ -cicli nel grafo di Collatz

Consideriamo ora i cicli nel grafo di Collatz, siamo interessati a sapere se ce ne sono altri, oltre a quello banale  $(1, 2)$ . Consideriamo la seguente funzione

$$T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \qquad T(n) = \begin{cases} T_0 = n/2, & \text{se } n \text{ pari} \\ T_1(n) = \frac{3n+1}{2}, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad (2.1)$$

e studiamo la successioni periodiche del tipo  $\{T^k(n)\}$  con  $n, k \in \mathbb{N}$ , cioè non consideriamo le successioni illimitate. Siamo interessati solo alle parti periodiche, quindi se necessario, sostituiamo  $n$  al posto di qualche  $T^k(n)$  ch'è nella parte periodica. Da questo possiamo assumere che la successione è puramente periodica, cioè che esista un intero  $p \geq 1$  tale che nella successione periodica  $\{n, T^1(n), \dots, T^{p-1}(n), \dots\}$  si abbia  $T^p(n) = n$  (possiamo considerare  $p$  il più piccolo intero con questa proprietà, ma per i nostri fini non è essenziale). Consideriamo solo il periodo, cioè  $\{n, T^1(n), \dots, T^{p-1}(n)\}$ . Inoltre assumiamo che  $T^0(n) = n$  sia un minimo locale nella successione (non necessariamente il minimo globale). Questo capitolo è tratto da [SiWe].

**Definizione 2.1.** Ci siano  $m$  minimi locali nella successione periodica, di indici  $t_0, \dots, t_{m-1}$  tali che  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < p$ . Allora ci sono anche  $m$  massimi locali, che indichiamo con gli indici  $s_0, s_1, \dots, s_{m-1}$ . Così ogni massimo si trova tra due minimi, assumiamo che  $0 = t_0 < s_0 < t_1 < s_1 < \dots < t_{m-1} < s_{m-1} \leq p - 1$ . Definiamo una tale successione periodica come  $m$ -ciclo. Definiamo  $x_i, y_i$  come i valori del minimo e del massimo locale, vale a dire

$$x_i = T^{t_i}(n), \quad y_i = T^{s_i}(n).$$

Poniamo  $k_i = s_i - t_i$  per  $i = 0, \dots, m-1$  e  $l_i = t_{i+1} - s_i$  per  $i = 0, \dots, m-2$  e  $l_{m-1} = p + t_0 - s_{m-1}$ . Inoltre poniamo

$$K = \sum_{i=0}^{m-1} k_i, \quad L = \sum_{i=0}^{m-1} l_i.$$

In questo modo, la successione inizia con un numero dispari  $x_0$ , aumenta di  $k_0$  passi fino a che non incontra un numero pari  $y_0$ , allora decresce di  $l_0$  passi finché non incontra un numero dispari  $x_1$ , dopo di che aumenta di  $k_1$  passi finché non incontra un numero pari  $y_1$ , e così di seguito.

**Definizione 2.2.** Chiamiamo  $m$ -fold la ripetizione dell'1-ciclo  $\{1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2\}$ , l' $m$ -ciclo banale.

## 2.1 Il lemma di Crandall

Riprendiamo alcuni concetti espressi precedentemente e iniziamo dicendo che dato un  $m$ -ciclo non banale, poniamo  $x_{min} = \min\{x_0, \dots, x_{m-1}\}$ . Con  $X_0$  denotiamo un limite inferiore per  $x_{min}$  che sappiamo essere vero da un certo punto in poi. Al momento sappiamo dai calcoli di Tomás Oliveira e Silva 2007 che

$$x_{min} > X_0 = 5 \cdot 2^{60} > 3.7469 \cdot 10^{18}.$$

Consideriamo ora  $\delta = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 = 1.5849\dots$ . In questo capitolo questo numero avrà un ruolo centrale. Vediamo ora l'espansione in frazione continua di  $\delta$  ch'è pari a  $[1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 22, 1, 1, 55, \dots]$ , considero le convergenze  $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \dots, a_n]$  per  $n = 0, 1, \dots$ . Crandall ha dimostrato il seguente risultato

**Lemma 2.1.1.** *Presi  $\frac{p_n}{q_n}$  qualsiasi, se convergono a  $\delta$  con  $n \geq 4$ , allora per un  $m$ -ciclo non banale, vale*

$$K > \min \left\{ q_n, \frac{2x_{\min}}{q_n + q_{n+1}} \right\}.$$

La dimostrazione è nell'appendice.

Come conseguenza di questo risultato, abbiamo:

**Corollario 2.1.2.**

$$K > 5.8656 \cdot 10^8$$

*Dimostrazione.* Questo segue immediatamente dal lemma precedente, dal valore di  $X_0$  e dal fatto che  $q_{19} = 397573379$ ,  $q_{20} = 6189245291$  e  $q_{21} = 6586818670$ . Ora generalizziamo il lemma di Crandall per  $m$ -cicli, questo rende più chiaro il limite inferiore per  $K$ . Infatti

$$\frac{2x_{\min}}{397573379 + 6189245291} \approx 1.1377 \cdot 10^9 > 397573379$$

Mentre

$$\frac{2x_{\min}}{6189245291 + 6586818670} \approx 5.8656 \cdot 10^8 < 6189245291$$

## 2.2 Risultati famosi sull'inesistenza di cicli

Nel 1977 Steiner ha provato che non esistono 1-cicli non banali. Ha assunto l'esistenza di un 1-ciclo con  $k$  numeri dispari e  $l$  numeri pari e ha provato i seguenti risultati parziali:

1. Una disuguaglianza per il rapporto  $\frac{k+l}{k}$ ;

2. Un limite numerico inferiore per  $k$ , dal quale segue che  $\frac{k+l}{k}$  dev'essere una convergenza dall'espansione in frazione continua di  $\delta$ ;
3. Un limite superiore per  $k$  da un teorema di Baker sulle forme lineari con due logaritmi.
4. Un limite inferiore, molto efficiente, per i quozienti parziali nell'espansione in frazione continua di  $\delta$

Il calcolo numerico dei quozienti parziali mostra che il solo 1-ciclo banale soddisfa queste condizioni.

Il punto cruciale nella dimostrazione di Steiner per la non esistenza di 1-cicli è la disuguaglianza  $0 < (k + l) \log 2 - k \log 3 < \frac{1}{x_{\min}}$ . Il membro di destra è esponenzialmente piccolo in  $k$ , dal fatto che esistono  $k$  numeri dispari successivi partendo da  $x_0$ , questo implica che  $x_0 = a2^k - 1 \geq 2^k - 1$ . Da questo  $\frac{k+l}{k}$  dev'essere una convergenza di  $\delta$  per  $k \geq 5$ . Questa disuguaglianza ha una naturale generalizzazione per 2-cicli, nella seguente forma

$$0 < (K + L) \log 2 - K \log 3 < \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1},$$

tuttavia l'argomento di convergenza non funziona, perché  $k_0$  o  $k_1$  possono essere piccoli anche se  $K$  è grande. Tuttavia nel 2004 Simons [Si] ha dimostrato l'inesistenza di 2-cicli non banali. Sfruttando i valori medi di  $k_0$  e  $k_1$  ha derivato un limite superiore per l'espressione  $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1}$ , della forma  $ce^{-d(K+L)}$ , dove  $c$  e  $d$  sono costanti positive. Infatti ha generalizzato l'approccio di Steiner nel seguente modo:

1. Una generalizzazione per il rapporto  $\frac{K+L}{K}$ ;
2. Un limite numerico inferiore per  $K$ , dal quale segue che  $\frac{K+L}{K}$  dev'essere convergente, dall'espansione in frazione continua di  $\delta$ ;
3. Un limite superiore per  $K$ , applicando un teorema di Laurent, Mignotte e Nesterenko [LMN] sulle forme lineari con due logaritmi;

4. Un limite inferiore per i quozienti parziali nell'espansione in frazione continua di  $\delta$ .

Utilizzando metodi trascendenti, Brox [Br] ha mostrato che ci sono solo un numero finito di  $m$ -cicli con  $m < 2 \log K$ , da questo ha derivato il risultato che per ogni  $m$  ci sono solo un numero finito di  $m$ -cicli.

## 2.3 Limite superiore e inferiore

Nel seguito estendiamo i risultati precedentemente citati e proviamo che per ogni  $m$ , ci sono solo un numero finito di  $m$ -cicli. In realtà, estenderemo il risultato di Brox, derivando un limite superiore per gli  $m$ -cicli, che dipende solo da  $m$ , dati i valori di  $K, L$  e  $x_{min}$ .

Facendo grandi calcoli deriveremo anche un nuovo limite inferiore per questi valori. Allora combinando i limiti superiore e inferiore, proveremo che non ci sono  $m$ -cicli non banali per  $m \leq 75$ . Per quanto riguarda  $m = 76, m = 77$  diamo alcune possibili soluzioni, le quali saranno escluse quando i calcoli esterni arriveranno a un nuovo valore per  $X_0$ .

Per  $m \geq 78$  deriveremo esplicitamente dei limiti inferiori e superiori per la lunghezza del ciclo e per i numeri nel ciclo.

Il principale risultato è il seguente teorema.

**Teorema 2.3.1.** *Per un  $m$ -ciclo del problema di Collatz, siano  $K, L, x_{min}$  definiti come sopra.*

- (a) (Brox) *Per ogni  $m$  ci sono un numero finito di  $m$ -cicli.*
- (b) *Per  $1 \leq m \leq 75$  non esistono  $m$ -cicli non banali.*
- (c) *Per  $76 \leq m \leq 77$  l'unico possibile  $m$ -ciclo non banale soddisfa la condizione  $x_{min} > 3.7469 \cdot 10^{18}$  e*

$m$	$K =$	$L =$	$x_{min} <$
76	111738283365989051	65362705664058124	$4.3485 \cdot 10^{18}$
	117972833293231014	69009683580368485	$6.2044 \cdot 10^{18}$
	124207383220472977	72656661496678846	$1.0825 \cdot 10^{19}$
	130441933147714940	76303639412989207	$4.2381 \cdot 10^{19}$
77	111738283365989051	65362705664058124	$4.4057 \cdot 10^{18}$
	117972833293231014	69009683580368485	$6.2860 \cdot 10^{18}$
	124207383220472977	72656661496678846	$1.0967 \cdot 10^{19}$
	130441933147714940	76303639412989207	$4.2939 \cdot 10^{19}$
	242180216513703991	141666345077047331	$3.9957 \cdot 10^{18}$
	254649316368187917	148960300909668053	$8.7355 \cdot 10^{18}$

(d) Per  $m \geq 78$  i possibili cicli non banali soddisfano le seguenti condizioni:

Se  $78 \leq m \leq 90$  allora:

$$1.0550 \cdot 10^{17} < K < 1.3993m\delta^m < e^{0.46057m+\log m+0.33593},$$

$$6.1715 \cdot 10^{16} < L < 0.81850m\delta^m < e^{0.46057m+\log m-0.20028},$$

$$3.7469 \cdot 10^{18} < x_{min} < 339.14m^2\delta^m < e^{0.46057m+2\log m+5.8265},$$

Se  $91 \leq m \leq 515619$  allora:

$$1.3752 \cdot 10^{11} < K < 1.4784m\delta^m < e^{0.46057m+\log m+0.39095},$$

$$8.0448 \cdot 10^{10} < L < 0.86480m\delta^m < e^{0.46057m+\log m-0.14525},$$

$$3.7469 \cdot 10^{18} < x_{min} < 5.1825 \cdot 10^7 m^2\delta^m < e^{0.46057m+2\log m+17.764},$$

Se  $515620 \leq m \leq 343118772$  allora:

$$5.8656 \cdot 10^8 < K < 15.109m\delta^m < e^{0.46057m+\log m+2.7153},$$

$$3.4311 \cdot 10^8 < L < 8.8379m\delta^m < e^{0.46057m+\log m+2.1791},$$

$$3.7469 \cdot 10^{18} < x_{min} < e^{6.1260m},$$

Se  $m \geq 343118773$  allora:

$$1.7095m < K < 15.108m\delta^m < e^{0.46057m+\log m+2.7152},$$

$$m \leq L < 8.8372m\delta^m < e^{0.46057m+\log m+2.1790},$$

$$3.7469 \cdot 10^{18} < x_{min} < e^{6.1255m}.$$



Nel caso  $91 \leq m \leq 343118773$  il limite inferiore può essere un po' perfezionato. Il limite superiore in termini di potenze di  $e$  sono stati messi per facilitare il confronto.

## 2.4 Condizioni di esistenza di un $m$ -ciclo

### 2.4.1 La catena di equazioni

Descriviamo prima di tutto un  $m$ -ciclo più in dettaglio.

L'esistenza di  $k_i$ , numeri dispari successivi, a partire da  $x_i$ , implica che  $x_i \equiv -1 \pmod{2^{k_i}}$ , cioè  $x_i = 2^{k_i}a_i - 1$  per qualche intero  $a_i \geq 1$ . Andando su da un minimo locale  $x_i$ , il prossimo massimo locale  $y_i$  è espresso dalla formula  $y_i = 3^{k_i}a_i - 1$ . Allora scendendo dal prossimo minimo locale  $x_{i+1}$  si trova che  $y_i = 2^{l_i}x_{i+1}$  (con  $x_m = x_0$ ). Mettendo insieme questi risultati, arriviamo a una 'catena di equazioni'

$$3^{k_i}a_i - 1 = 2^{k_{i+1}+l_i}a_{i+1} - 2^{l_i}$$

per  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Se poniamo  $x_m = x_0$  allora  $a_m = a_0$  e  $k_m = k_0$ , imponiamo l'esistenza di un  $m$ -ciclo. Si nota che la catena di equazioni per  $m = 1$  è il cuore del risultato di Steiner. D'ora in poi consideriamo  $m \geq 2$ .

### 2.4.2 Soluzioni intere e razionali

Fissiamo  $k_i, l_i$  nella catena di equazioni, abbiamo  $m$  equazioni lineari in  $m$  variabili  $a_i$ . Prendiamo la 'matrice di equazioni'

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{l_0} - 1 \\ 2^{l_1} - 1 \\ \vdots \\ 2^{l_{m-1}} - 1 \end{pmatrix},$$

Dove la matrice  $M$  è definita nel modo seguente:

$$M = \begin{pmatrix} -3^{k_0} & 2^{k_1+l_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -3^{k_1} & 2^{k_2+l_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -3^{k_{m-2}} & 2^{k_{m-1}+l_{m-2}} \\ 2^{k_0+l_{m-1}} & 0 & \dots & 0 & -3^{k_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Poniamo  $\Delta = 2^{K+L} - 3^K$ . Allora  $\det(M) = (-1)^{m-1}\delta$ . Usando l'algebra lineare e un argomento di Böhm e Sontacchi [BS], troviamo la matrice inversa  $M^{-1}$ . Poniamo  $\Delta M^{-1} = (m_{i,j})_{i,j=0,1,\dots,m-1}$ ,

$$\alpha_{i,j} = \sum_{h=i+1}^{j^*} k_h, \beta_{i,j} = \sum_{h=i+1}^{j^*} l_{h-1},$$

dove abbiamo che

$$j^* := \begin{cases} j & \text{se } i \leq j \\ j + m & \text{se } i > j \end{cases},$$

dove gli indici di  $k_h, l_h$  sono presi modulo  $m$ . Allora è facile verificare che abbiamo  $m_{i,j} = 2^{\alpha_{i,j}+\beta_{i,j}} 3^{K-k_i-\alpha_{i,j}}$ . In particolare  $m_{i,j} > 0$  e allora la matrice di equazioni e  $a_i > 0$  implicano che  $\Delta > 0$ .

Da questo segue che gli  $m$ -cicli sono in corrispondenza biunivoca con le soluzioni  $k_i, l_i, a_i$  della matrice di equazione, con  $k_i, l_i, a_i$  interi positivi. Data una combinazione di  $k_i$  e  $l_i$ , al più esiste una soluzione (c'è esattamente una soluzione con  $a_i$  razionale, ma nella maggior parte dei casi gli  $a_i$  non sono interi). Ora quando sapremo il limite superiore per  $K$  e  $L$ , avremo solo un numero finito di soluzioni razionali, senza considerare il fatto che in linea di principio posso essere contate.

## 2.5 Condizioni su $K$ e $m$ da una forma lineare di logaritmi

### 2.5.1 Introduzione a $\Lambda$

Come nelle dimostrazioni di Steiner e Simons, la base del nostro risultato finale è una forma lineare di logaritmi interi, che per  $m$ -cicli grandi, risulta essere la più piccola possibile. Questa forma lineare è

$$\Lambda = (K + L) \log 2 - K \log 3.$$

### 2.5.2 Una prima disuguaglianza per $\Lambda$

**Lemma 2.5.1.**

$$0 < \Lambda < \sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i}$$

*Dimostrazione.* Riscrivendo la catena di equazioni come

$$\frac{2^{k_{i+1}+l_i}}{3^{k_i}} \frac{a_{i+1}}{a_i} = 1 + \frac{2^{l_i-1}}{3^{k_i} a_i}.$$

Prendendo il prodotto su tutti gli indici  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , e usando la ciclicità, abbiamo che

$$\frac{2^{K+L}}{3^K} = \prod_{i=0}^{m-1} \left( 1 + \frac{2^{l_i-1}}{3^{k_i} a_i} \right).$$

Adesso applichiamo  $\log(1+x) < x$  a ogni termine del prodotto, otteniamo

$$0 < \Lambda = \sum_{i=0}^{m-1} \log \left( 1 + \frac{2^{l_i-1}}{3^{k_i} a_i} \right) < \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{l_i-1}}{3^{k_i} a_i}.$$

I risultati ora seguono da  $3^{k_i} a_i = y_i + 1 > y_i = 2^{l_i} x_{i+1} > (2^{l_i} - 1) x_{i+1}$  e la ciclicità.  $\square$

Dal lemma 2.5.1 abbiamo

**Corollario 2.5.2.**

$$0 < \Lambda < \frac{m}{x_{\min}} \leq \frac{m}{X_0}.$$

*Dimostrazione.* Basta usare il lemma 2.5.1 con  $x_i \geq x_{\min} \geq X_0$ .

□

### 2.5.3 Concatenamento

Adesso voglio mostrare che tutti gli  $x_i$  sono esponenzialmente grandi in termini di  $K$  (o equivalentemente,  $K + L$ ). Per farlo, prima mostriamo che tutti gli  $x_i$  sono circa della stessa dimensione, con la loro 'concatenazione'. Posto  $b = \frac{1+X_0^{-1}}{2^{\frac{1}{\delta}}}$ . Con l'attuale valore di  $X_0$ , abbiamo  $b = 0.64576 \dots$ . Infatti, la dipendenza da  $X_0$  è trascurabile.

**Lemma 2.5.3.** *Per tutti gli  $i = 0, \dots, m-1$  abbiamo*

$$x_{i+1} < b^\delta x_i^\delta.$$

*Dimostrazione.* Ora abbiamo

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{y_i}{2^{l_i}} < \frac{y_i + 1}{2^{l_i}} = \frac{3^{k_i} a_i}{2^{l_i}} \leq \frac{3^{k_i}}{2} a_i = \frac{3^{k_i}}{2} \frac{x_i + 1}{2^{k_i}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{k_i} \frac{x_i + 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (2^{k_i})^{\delta-1} (x_i + 1). \end{aligned}$$

Adesso utilizziamo  $a_i \geq 1$  e  $x_i \geq X_0$  per avere

$$x_{i+1} < \frac{1}{2} (2^{k_i} a_i)^{\delta-1} (x_i + 1) = \frac{1}{2} (x_i + 1)^\delta \leq \frac{1}{2} (1 + X_0^{-1})^\delta x_i^\delta = b^\delta x_i^\delta.$$

□

Notiamo che la disuguaglianza del lemma precedente è valida ciclicamente. Come conseguenza possiamo stimare tutti i termini  $x_i$  di un  $x_i$  scelto da noi, detto  $x_0$ .

### 2.5.4 Un'altra disuguaglianza per $\Lambda$

Posto

$$c_m = 2^{\frac{m}{\delta} \frac{\delta-1}{\delta^m-1}} b^{\frac{\delta}{\delta-1} - \frac{m}{\delta^m-1}}.$$

Con l'attuale valore di  $X_0$  troviamo che  $c_m$  decresce da  $c_2 = 0.76479\dots$  a  $b^{\frac{\delta}{\delta-1}} = 0.30576\dots$ . Quando anche  $X_0$  tende all'infinito, abbiamo  $c_m \rightarrow 2^{\frac{-1}{\delta-1}} = 0.30576\dots$ . Comunque  $c_m < 0.30577$  per  $m \geq 30$ .

Come conseguenza dei lemmi 2.5.3 e 2.5.1, possiamo stimare  $\Lambda$  in termini dei suoi coefficienti, cioè  $K$ .

**Lemma 2.5.4.**

$$0 < \Lambda < mc_m 2^{-\frac{\delta-1}{\delta^m-1}K}.$$

*Dimostrazione.* Il lemma 2.5.3 implica  $x_i < b^{\delta+\delta^2+\dots+\delta^i} x_0^{\delta^i}$  per  $i = 1, 2, \dots, m-1$ . Da questo

$$\prod_{i=0}^{m-1} x_i < b^{(m-1)\delta+(m-2)\delta^2+\dots+\delta^{m-1}} x_0^{\delta+\delta^2+\dots+\delta^{m-1}} = b^{\frac{\delta}{\delta-1}(\frac{\delta^m-1}{\delta-1}-m)} x_0^{\frac{\delta^m-1}{\delta-1}}.$$

D'altra parte, anche

$$\prod_{i=0}^{m-1} x_i = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{x_i + 1}{1 + x_i^{-1}} \geq (1 + X_0^{-1})^{-m} \prod_{i=0}^{m-1} 2^{k_i} a_i \geq (1 + X_0^{-1})^{-m} 2^K,$$

dove semplifichiamo utilizzando la stima  $a_i \geq 1$ . Da questo

$$x_0^{-\frac{\delta^m-1}{\delta-1}} < (1 + X_0^{-1})^m b^{\frac{\delta}{\delta-1}(\frac{\delta^m-1}{\delta-1}-m)} 2^{-K} = c_m^{\frac{\delta^m-1}{\delta-1}} 2^{-K}.$$

Adesso scegliamo  $x_0 = x_{\min}$ , possiamo farlo per la ciclicità. Il corollario 2.5.2 e il lemma 2.5.1 ci mostrano che

$$0 < \Lambda < \frac{m}{x_{\min}} < mc_m 2^{-\frac{\delta-1}{\delta^m-1}K}.$$

□

Anche se in senso stretto, la disuguaglianza del lemma 2.5.4 dipende dal valore di  $X_0$ , ma questa dipendenza è trascurabile.

## 2.6 Condizioni su $K$ e $m$ dalle frazioni continue

### 2.6.1 Un utile lemma

Una conseguenza del corollario 2.5.2 e del lemma 2.5.1 è che abbiamo un limite inferiore e superiore netto per il rapporto  $\frac{K+L}{K}$ ,  $\frac{K+L}{L}$  e  $\frac{K}{L}$ . Questo non è utile solo in questa sezione ma anche nelle future.

**Lemma 2.6.1.**

$$\begin{aligned}\delta K &< K + L < 1.000001\delta K, \\ 0.999999\frac{\delta}{\delta-1}L &< K + L < \frac{\delta}{\delta-1}L. \\ 0.999999\frac{1}{\delta-1}L &< K < \frac{1}{\delta-1}L.\end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Dal corollario 2.5.2 e dal attuale valore di  $X_0$  abbiamo

$$0 < K + L - K\delta < \frac{m}{X_0 \log 2} \leq \frac{K}{X_0 \log 2} < 10^{-18}K,$$

e subito si hanno le disuguaglianze.

### 2.6.2 Risultati sulle frazioni continue

Richiamiamo la notazione  $\frac{p_n}{q_n}$  con cui ci riferivamo all' $n$ -esima convergenza di  $\delta$ . La teoria delle frazioni continue mostra che le convergenze sono la miglior stima, cioè ogni altra approssimazione con denominatore più piccolo è peggiore. Altre disequazioni sufficienti e necessarie per le convergenze sono utilizzabili. Infatti, abbiamo il seguente risultato, le dimostrazioni che riguardano questo fatto si trovano nell'introduzione di molti testi di teoria dei numeri.  $\square$

**Lemma 2.6.2.** (a) Se  $\frac{p}{q}$  è un'approssimazione razionale di  $\delta$ , che soddisfa  $|p - q\delta| < \frac{1}{2q}$ , allora  $\frac{p}{q}$  è una convergenza.

$$(b) \quad |p_n - q_n\delta| > \frac{1}{q_n + q_{n+1}} > \frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n}.$$

(c) Se  $\frac{p}{q}$  è un'approssimazione razionale di  $\delta$  e se  $q \leq q_n$ , allora  $|p - q\delta| \geq |p_n - q_n\delta|$ .

(d) Se  $n$  è dispari allora  $p_n - q_n\delta > 0$ ; se  $n$  è pari allora  $p_n - q_n\delta < 0$ .

### 2.6.3 Una generalizzazione del lemma di Crandall per gli $m$ -cicli

Con il corollario 2.5.2 possiamo derivare un risultato simile al lemma di Crandall 2.1.1, il quale ci dà un limite inferiore per  $K$  che dipende da  $m$ .

**Lemma 2.6.3.** Se

$$q_n + q_{n+1} \leq (\log 2) \frac{X_0}{m}, \quad \text{allora } K > q_n.$$

*Dimostrazione.* Per assurdo assumiamo che  $K \leq q_n$ . Dalle parti (b) e (c) del lemma 2.6.2

$$\Lambda = (\log 2)|(K + L) - K\delta| \geq (\log 2)|p_n - q_n\delta| > \frac{\log 2}{q_n + q_{n+1}} \geq \frac{m}{X_0},$$

il che contraddice il corollario 2.5.2.

□

Applicando questo lemma per ogni  $m$ , il massimo  $n$  che soddisfa queste condizioni, porterà al seguente risultato

**Corollario 2.6.4.** Se  $m = 3$  allora  $K > q_{34} > 2.6711 \cdot 10^{17}$ .

Se  $4 \leq m \leq 6$  allora  $K > q_{33} > 1.3044 \cdot 10^{17}$ .

Se  $7 \leq m \leq 19$  allora  $K > q_{32} > 6.2345 \cdot 10^{15}$ .

Se  $20 \leq m \leq 216$  allora  $K > q_{31} > 5.7509 \cdot 10^{15}$ .

Se  $217 \leq m \leq 416$  allora  $K > q_{30} > 4.8361 \cdot 10^{14}$ .

Se  $417 \leq m \leq 2839$  allora  $K > q_{29} > 4.3116 \cdot 10^{14}$ .

Se  $2840 \leq m \leq 5370$  allora  $K > q_{28} > 5.2449 \cdot 10^{13}$ .

Se  $5371 \leq m \leq 40568$  allora  $K > q_{27} > 1.1571 \cdot 10^{13}$ .

*Se  $40569 \leq m \leq 146453$  allora  $K > q_{26} > 6.1624 \cdot 10^{12}$ .*

*Se  $146454 \leq m \leq 224445$  allora  $K > q_{25} > 5.4093 \cdot 10^{12}$ .*

*Se  $224446 \leq m \leq 421461$  allora  $K > q_{24} > 7.5311 \cdot 10^{11}$ .*

*Se  $421462 \leq m \leq 2916130$  allora  $K > q_{23} > 1.3752 \cdot 10^{11}$ .*

*Se  $2916131 \leq m \leq 12794266$  allora  $K > q_{22} > 6.5470 \cdot 10^{10}$ .*

*Se  $12794267 \leq m \leq 36043734$  allora  $K > q_{21} > 6.5868 \cdot 10^9$ .*

*Se  $36043735 \leq m \leq 203287878$  allora  $K > q_{20} > 6.1892 \cdot 10^9$ .*

*Se  $203287879 \leq m \leq 343118772$  allora  $K > 5.8656 \cdot 10^8$ .*

*Se  $m \geq 3431187734$  allora  $K > 1.7095m$ .*

*Dimostrazione.* Tutte le righe tranne le ultime due, seguono immediatamente dal lemma precedente. La penultima riga segue dal corollario 2.1.2, mentre l'ultima riga segue dal lemma 2.6.1 con la semplice osservazione che  $L \geq m$ .  $\square$

Si noti che gli intervalli per  $m$  nel corollario 2.6.4 dipendono pesantemente dal valore di  $X_0$ . Si può notare che il corollario 2.6.4 implica che  $K > 4.3641 \cdot 10^{16 \frac{1}{m}}$ .

## 2.7 Applicazione della teoria della trascendenza

Adesso sappiamo che  $\Lambda$  è esponenzialmente piccolo in termini dei suoi coefficienti, possiamo invocare risultati profondi della teoria della trascendenza, la quale ci dice che le forme lineari con logaritmi di interi, non possono essere troppo piccole in termini dei loro coefficienti. Dalla pubblicazione di Steiner, dove ha usato la stessa idea di teoria della trascendenza per provare la non esistenza di 1-cicli non banali, la teoria della trascendenza ha fatto dei sostanziali progressi. Per le forme lineari generali del tipo  $x \log a + y \log b$



con  $x, y \in \mathbb{Z}$  e  $a, b \in \mathbb{N}$  i migliori risultati sono di Laurent, Mignotte e Nestorenko per  $x, y$  piccoli mentre per  $x, y$  grandi sono di Matveev [Ma]. Però nel nostro caso specifico  $x \log 2 + y \log 3$ , il miglior risultato è di Rhin [Rh]. Da qui deriviamo la seguente stima.

**Lemma 2.7.1.**

$$\Lambda > e^{-13.3(0.46057 + \log K)}.$$

Enunciamo la proposizione di Rhin [Rh] che ci servira' nella dimostrazione del lemma

**Proposizione 2.7.2.** *Siano  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{Z}$  tali che  $H = \max(|u_1|, |u_2|) \geq 2$ . Allora la forma  $A = u_0 + u_1 \log 2 + u_2 \log 3$  verifica*

$$(1) \quad |A| \geq H^{-13.3}. \quad (2.2)$$

Vediamo ora la dimostrazione del nostro lemma.

*Dimostrazione.* Applicando la proposizione precedente con  $u_0 = 0$ ,  $H = u_1 = K + L$  e  $u_2 = -K$ . Insieme al lemma 2.6.1, segue il risultato.  $\square$

Come conseguenza del lemma 2.7.1 abbiamo il fatto di poter stimare il minimo globale di un  $m$ -ciclo in termini di  $K$ .

**Corollario 2.7.3.**

$$x_{\min} < me^{13.3(0.46057 + \log K)}.$$

*Dimostrazione.* Applicando il corollario 2.5.2 e il lemma 2.7.1  $\square$

## 2.8 Limiti superiori per $K, L$ e $x_{\min}$

### 2.8.1 Limite iniziale superiore

Chiaramente i lemmi 2.5.4 e 2.7.1 sono contraddittori quando  $K$  è abbastanza grande. In altre parole, forniscono un limite superiore per  $K$  mentre il lemma 2.6.1 e il corollario 2.7.3, lo forniscono anche per  $L$  e  $x_{\min}$ .

**Lemma 2.8.1.** *Sia  $x = K_1(m)$  la più grande soluzione di*

$$e^{-13.3(0.46057+\log x)} = mc_m 2^{-\frac{\delta-1}{\delta^m-1}x}.$$

*Allora*

$$K < K_1(m).$$

*Dimostrazione.* E' immediata dai lemmi 2.5.4 e 2.7.1 e dalla definizione di  $K_1(m)$ . □

Sia  $k_1(m) = \frac{K_1(m)}{m\delta^m}$ . Notiamo che  $k_1(m)$  è una funzione decrescente che all'aumentare di  $m$  tende alla costante  $\frac{13.3 \log \delta}{\log 2(\delta-1)} = 15.107\dots$  per  $m \rightarrow \infty$ . Infatti:

$m$	$k_1(m) <$	$K_1(m) <$	$m$	$k_1(m) <$	$K_1(m) <$
2	61.456	$3.0877 \cdot 10^2$	100000	15.113	$1.1981 \cdot 10^{20008}$
10	35.8434	$3.5858 \cdot 10^4$	515619	15.109	$3.0475 \cdot 10^{103140}$
63	19.158	$4.8181 \cdot 10^{15}$	515620	15.109	$4.8301 \cdot 10^{103140}$
64	19.102	$7.7350 \cdot 10^{15}$	1000000	15.108	$1.4816 \cdot 10^{200026}$
100	17.798	$1.7876 \cdot 10^{23}$	10000000	15.108	$1.2429 \cdot 10^{2000198}$
511	15.739	$1.3035 \cdot 10^{106}$	100000000	15.108	$2.1457 \cdot 10^{20001908}$
512	15.738	$2.0698 \cdot 10^{106}$	263937517	15.108	$3.7698 \cdot 10^{52792525}$
1000	15.453	$1.6144 \cdot 10^{204}$	263937518	15.108	$5.9750 \cdot 10^{52792525}$
10000	15.150	$2.3460 \cdot 10^{2005}$	1000000000	15.108	$5.0463 \cdot 10^{200019001}$

La dipendenza di  $K_1(m)$  da  $X_0$  è trascurabile.

Abbiamo provato il teorema 2.3.1(a) per ogni  $m$ , allora ci sono solo un numero finito di  $m$ -cicli. Inoltre, possiamo derivare esplicitamente il limite superiore e inferiore per  $K, L$  e  $x_{min}$  come dichiarato nel teorema 2.3.1(d).

*Dimostrazione.* del teorema 2.3.1(d) per  $m \geq 515620$ .

Il limite superiore per  $K$  segue dal lemma 2.8.1 e dall'osservazione che  $k_1$  è

una funzione decrescente di  $m$ . Il limite inferiore per  $K$  segue dal corollario 2.6.4. I limiti per  $L$  e  $x_{\min}$  seguono dalla combinazione del lemma 2.6.1 e il corollario 2.7.3.  $\square$

Inoltre possiamo combinare il lemma 2.8.1 con il lemma 2.6.3, per dimostrare che per  $m$  piccolo non ci sono affatto soluzioni. Il prossimo lemma dimostra parte del teorema 2.3.1(b).

**Lemma 2.8.2.** *Non ci sono  $m$ -cicli non banali per  $2 \leq m \leq 63$ .*

*Dimostrazione.* Dal lemma 2.8.1, per  $m \leq 63$  abbiamo  $K < K_1(m) \leq K_1(63) < 4.8181 \cdot 10^{15}$ . Questo contraddice il fatto che  $K > 5.7509 \cdot 10^{15}$  per il corollario 2.6.4 e dal lemma 2.6.3.  $\square$

Il massimo valore di  $m$  nel lemma precedente dipende pesantemente dal valore di  $X_0$ , nel senso che ogni sostanziale miglioramento del valore di  $X_0$ , porta immediatamente a un miglioramento del limite superiore per  $m$ , in questo modo funziona la dimostrazione.

## 2.8.2 Limiti superiori ridotti

Usiamo come argomento una frazione continua, per trovare un migliore limite superiore di  $K$ . Calcoliamo la frazione continua di  $\delta$  fino ad  $a_{200001}$ . Sia  $x = J_2(m)$  la soluzione più grande di

$$mc_m 2^{-\frac{\delta-1}{\delta^m-1}x} = \frac{\log 2}{2x}.$$

I lemmi 2.5.4 e 2.6.2(a) implicano che  $\frac{K+L}{K}$  è una convergenza di  $\delta$  ogni volta che  $K > J_2(m)$ . Notiamo che solo le convergenze con indice dispari, sono quelle interessanti, siccome il segno di  $p_n - q_n\delta$  si alterna (2.6.2(d)), abbiamo  $\Lambda > 0$ . Considerando il lemma 2.6.2(b), sono particolarmente interessanti i quozienti parziali  $a_n$  che sono i campioni, nel senso che  $a_k < a_n$  ogni volta che  $k < n$ .

Per ogni  $m$ , sia  $n(m)$  l'indice  $n$  del più piccolo campione per il quale  $K_1(m) <$

$q_{n-1}$ . Allora definiamo  $A(m) := \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n(m)-2}\}$ . Chiaramente  $A(m)$  è il campione prima di  $n(m)$ . Infatti abbiamo:

$m$	$n(m)$	$A(m)$	$K_1(m) <$	$q_{n(m)-1} >$
$64 \leq m \leq 511$	218	55	$1.3035 \cdot 10^{106}$	$1.3133 \cdot 10^{106}$
$4512 \leq m \leq 551$	230	100	$1.4043 \cdot 10^{114}$	$1.7807 \cdot 10^{114}$
$552 \leq m \leq 816$	330	964	$2.0804 \cdot 10^{167}$	$2.6341 \cdot 10^{167}$
$817 \leq m \leq 1340$	528	2436	$2.1843 \cdot 10^{272}$	$2.3119 \cdot 10^{272}$
$1341 \leq m \leq 7009$	2764	3308	$9.1127 \cdot 10^{1406}$	$1.2197 \cdot 10^{1407}$
$7010 \leq m \leq 11143$	4312	4878	$1.0938 \cdot 10^{2234}$	$1.4973 \cdot 10^{2234}$
$11144 \leq m \leq 54234$	21150	8228	$5.5425 \cdot 10^{10853}$	$8.2400 \cdot 10^{10853}$
$54235 \leq m \leq 315502$	122416	59599	$1.1752 \cdot 10^{63113}$	$1.2759 \cdot 10^{63113}$
$315503 \leq m \leq 515619$	200002	104733	$3.0475 \cdot 10^{103140}$	$3.5522 \cdot 10^{103140}$

Per  $m \geq 515620$ , in linea di principio, possiamo trovare i corrispondenti valori di  $A(m)$ , quando calcoliamo più quozienti parziali. Con la parte di frazione continua che abbiamo a disposizione, possiamo trovare, nel seguente modo, un limite superiore più nitido per tutti gli  $m \leq 515619$ . Sia  $x = K_2(m)$  la più grande soluzione di

$$mc_m 2^{-\frac{\delta-1}{\delta^m-1}x} = \frac{\log 2}{(A(m) + 2)x}.$$

Notiamo che  $j_2(m) = \frac{J_2(m)}{(m\delta^m)}$  è una funzione limitata, che tende a  $\frac{\log \delta}{((\delta-1) \log 2)} = 1.1358\dots$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Anche ponendo  $k_2(m) = \frac{K_2(m)}{(m\delta^m)}$ . Siccome non sappiamo come sarà la crescita di  $A(m)$  all'aumentare di  $m$ , non sappiamo l'esatto comportamento di  $k_2(m)$ , ma molto probabilmente tenderà a  $\frac{\delta}{((\delta-1) \log 2)} = 1.1358\dots$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Infatti:

$m$	$j_2(m) <$	$J_2(m) <$	$k_2(m) <$	$K_2(m) <$
64	1.4664	$5.9379 \cdot 10^{14}$	1.5988	$6.4742 \cdot 10^{14}$
67	1.4547	$2.4553 \cdot 10^{15}$	1.5810	$2.6686 \cdot 10^{15}$
68	1.4510	$3.9396 \cdot 10^{15}$	1.5754	$4.2776 \cdot 10^{15}$
90	1.3881	$1.2542 \cdot 10^{20}$	1.4817	$1.3388 \cdot 10^{20}$
91	1.3859	$2.0068 \cdot 10^{20}$	1.4784	$2.1408 \cdot 10^{20}$
100	1.3677	$1.3737 \cdot 10^{22}$	1.4518	$1.4582 \cdot 10^{22}$
511	1.1964	$9.9079 \cdot 10^{104}$	1.2126	$1.0043 \cdot 10^{105}$
512	1.1963	$1.5734 \cdot 10^{105}$	1.2153	$1.5984 \cdot 10^{105}$
551	1.1927	$1.0669 \cdot 10^{113}$	1.2103	$1.0827 \cdot 10^{113}$
552	1.1926	$1.6940 \cdot 10^{113}$	1.2203	$1.7333 \cdot 10^{113}$
816	1.1766	$1.5769 \cdot 10^{166}$	1.1953	$1.6020 \cdot 10^{166}$
817	1.1765	$2.5023 \cdot 10^{166}$	1.1980	$2.5480 \cdot 10^{166}$
1000	1.1701	$1.2224 \cdot 10^{203}$	1.1876	$1.2407 \cdot 10^{203}$
1340	1.1625	$1.6517 \cdot 10^{271}$	1.1756	$1.6703 \cdot 10^{271}$
1341	1.1625	$2.6198 \cdot 10^{271}$	1.1761	$2.6506 \cdot 10^{271}$
7009	1.1422	$6.8625 \cdot 10^{1405}$	1.1448	$6.8782 \cdot 10^{1405}$
7010	41.1422	$1.0879 \cdot 10^{1406}$	1.1449	$1.0905 \cdot 10^{1406}$
10000	1.1405	$1.7660 \cdot 10^{2004}$	1.1424	$1.7690 \cdot 10^{2004}$
11143	1.1401	$8.2326 \cdot 10^{2232}$	1.1418	$8.2450 \cdot 10^{2232}$
11144	1.1401	$1.3050 \cdot 10^{2233}$	1.1419	$1.3071 \cdot 10^{2233}$
54234	1.1369	$4.1685 \cdot 10^{10852}$	1.1373	$4.1698 \cdot 10^{10852}$
54235	1.1369	$6.6069 \cdot 10^{10852}$	1.1374	$6.6097 \cdot 10^{10852}$
100000	1.1365	$9.0096 \cdot 10^{20006}$	1.1368	$9.0116 \cdot 10^{20006}$
4315502	1.1361	$8.8364 \cdot 10^{63111}$	1.1362	$8.8371 \cdot 10^{63111}$
315503	1.1361	$1.4006 \cdot 10^{63112}$	1.1362	$1.4007 \cdot 10^{63112}$
515619	1.1361	$2.2915 \cdot 10^{103139}$	1.1361	$2.2916 \cdot 10^{103139}$

Il prossimo lemma ci da' un migliore limite superiore per  $K$ , nell'intervallo in cui l'argomento della frazione continua può essere applicato, data la parte

di frazione continua da calcolare.

**Lemma 2.8.3.** *Per  $64 \leq m \leq 515619$ , un possibile  $m$ -ciclo soddisfa  $K < K_2(m)$ .*

*Dimostrazione.* Notiamo che  $J_2(m) < K_2(m)$  per ogni  $m$ , così possiamo assumere che  $K > J_2(m)$ . Allora dalla definizione di  $J_2$ , il lemma 2.5.4 implica che  $\Lambda < \frac{\log 2}{2K}$ , così per il lemma 2.6.2(a), mostriamo che  $\frac{K+L}{K} = \frac{p_n}{q_n}$  per qualche  $n$  dispari. Dal lemma 2.8.1, abbiamo  $K < K_1(m) < q_{n(m)-1}$ , che implica  $n \leq n(m) - 2$ , da cui  $a_{n+1} \leq A(m)$ . La definizione di  $K_2$  e i lemmi 2.6.2(b) e 2.5.4 implicano  $K < K_2(m)$ .  $\square$

Un calcolo mostra che ci sono solo 68 valori, tra 64 e 515619 per cui  $\frac{p_n}{q_n}$  è una convergenza con indice dispari e  $J_2(m) < q_n < K_2(m)$ . Negli altri casi  $q_n > J_2(m)$  implica  $q_n > K_2(m)$ . Così  $J_2$  e  $K_2$  sono relativamente vicini. Come conseguenza del lemma 2.8.3, possiamo anche provare la parte (d) del teorema 2.3.1, migliorando i limiti superiori di  $K, L$  e  $x_{\min}$  nel caso in cui  $91 \leq m \leq 515619$ . Per  $m \leq 90$  raggiungeremo un risultato migliore, nella nuova sezione.

*Dimostrazione.* del teorema 2.3.1(d) per  $91 \leq m \leq 515619$ .

Il limite superiore per  $K$ , segue dal lemma 2.8.3 e dall'osservazione che  $k_2(m) < 1.4784$  (notiamo ch'è una funzione decrescente, ad eccezione di quando  $A(m)$  salta al nuovo campione). Il limite inferiore per  $K$  segue dal corollario 2.6.4. I limiti inferiori per  $L$  seguono dal fatto precedente e dal lemma 2.6.1.

Dato  $x_{\min}$  possiamo trovare un limite superiore piuttosto netto, nel modo seguente, sia  $n$  l'indice tale che  $q_{n-1} < K \leq q_n$ . Dal fatto che  $K < K_2(m) \leq K_2(515619) < 2.2916 \cdot 10^{103139} < 7.5013 \cdot 10^{103139} < q_{199998}$ , abbiamo che  $n \leq 199998$ . Dalla frazione continua, troviamo che l'intervallo  $(a_n + 1)(a_{n+1} + 2) \leq 24298288$ . Ora utilizzando il corollario 2.5.2 e il lemma 2.6.2(c) e (b) mostriamo che  $x_{\min} < \frac{m}{\Lambda} < \frac{m}{(\log 2)|p_q - q_n \delta|} < \frac{m(a_{n+1}+2)q_n}{\log 2} <$

$\frac{m(a_n+1)(a_{n+1}+2)q_{n+1}}{\log 2} < \frac{m(a_n+1)(a_{n+1}+2)K}{\log 2} < \frac{24298288}{\log 2}mK$ , dove noi usiamo  $q_n = a_n q_{n+1} + q_{n+2} < (a_n + 1)q_{n-1}$ . Si ha subito il limite per  $x_{min}$ .  $\square$

Il miglioramento che abbiamo raggiunto, per il limite di  $x_{min}$  è sostanziale. Tuttavia, il miglioramento dei limiti di  $K$  e  $L$  è in qualche misura marginale (non possiamo migliorare il termine dominante  $\delta^m$ ), il miglioramento diventa significativo per  $m$  piccolo, quando combiniamo il lemma 2.8.3 con il lemma 2.6.3, per avere un risultato migliore del lemma 2.8.2. Il prossimo lemma riguarda la parte (b) del teorema 2.3.1.

**Lemma 2.8.4.** *Non ci sono  $m$ -cicli non banali, per  $2 \leq m \leq 68$ .*

*Dimostrazione.* Dal lemma 2.8.2 assumiamo  $m \geq 64$ . Dal lemma 2.8.3, per  $m \leq 68$  abbiamo  $K < K_2(m) \leq K_2(68) < 4.2776 \cdot 10^{15}$ . Ma questo contraddice  $K > 5.7509 \cdot 10^{15}$  del corollario 2.6.4.  $\square$

Il massimo valore di  $m$  nel lemma 2.8.4 dipende dal valore di  $X_0$ , nel senso che ogni sostanziale miglioramento del valore di  $X_0$  conduce a un miglioramento del limite superiore per  $m$ .

## 2.9 Eliminazione delle soluzioni piccole

### 2.9.1 Convergenze

L'approccio classico è di mostrare, in base al lemma 2.6.2(a), con un raffinamento per esempio usando 'le convergenze secondarie', che le possibili soluzioni in un certo intervallo sono le convergenze (secondarie) e quindi di verificare tutte le convergenze (secondarie) per il corollario 2.5.2. Nel seguito useremo un'approssimazione con il metodo del reticolo, che può essere visto come una variante più potente del metodo delle frazioni continue.

### 2.9.2 Reticoli

Cerchiamo le soluzioni in un'approssimazione del reticolo, nel modo seguente, per un vettore  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , definiamo la norma  $\|x\| := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ . Posto

$$C = \left\lfloor \frac{X_0 \log 2}{m} K_2(m) \right\rfloor.$$

Adesso sia

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [C\delta] & C \end{pmatrix},$$

Dove le parentesi quadrate stanno per l'arrotondamento all'intero più vicino. Allora pensiamo al reticolo delle combinazioni  $\mathbb{Z}$ -lineari delle colonne di  $\Gamma$ . Per una soluzione  $K, L$  che soddisfa il corollario 2.5.2, il lemma 2.5.4 e il lemma 2.8.3, guardiamo il seguente punto del reticolo

$$x = \Gamma \begin{pmatrix} -K \\ K + L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K \\ \Lambda_0 \end{pmatrix},$$

dove  $\Lambda_0 = (K + L)C - K[C\delta]$  è un'approssimazione di  $\frac{C}{\log 2}\Lambda$ . In realtà dal lemma 2.8.3 abbiamo che

$$\left| \Lambda_0 - \frac{C}{\log 2}\Lambda \right| \leq K|C\delta - [C\delta]| \leq \frac{1}{2}K_2(m).$$

Dal corollario 2.5.2 e dalla definizione di  $C$ , segue che

$$|\Lambda_0| \leq \frac{1}{2}K_2(m) + \frac{C}{\log 2}|\Lambda| < \frac{1}{2}K_2(m) + \frac{C}{\log 2} \frac{m}{X_0} \leq K_2(m).$$

Ne segue che dobbiamo cercare solo i punti del reticolo con norma al più  $K_2(m)$ . Per riuscirci efficientemente, calcoliamo (con le frazioni continue e l'algoritmo di Euclide) una base ridotta del reticolo. Sia  $\Gamma_{red}$  una matrice con come colonne questa base ridotta. Il punto  $x$  del reticolo può essere espresso nella base ridotta come  $x = \Gamma_{red}z$  per qualche  $z \in \mathbb{Z}^2$ . A causa della riduzione della base, il numero di punti da cercare è approssimativamente  $\frac{K_2(m)^2}{C} \approx \frac{m}{X_0}K_2(m)$ . Una ricerca di tipo forza bruta, per i punti  $z \in \mathbb{Z}^2$  tali che  $\|\Gamma_{red}z\| \leq K_2(m)$  è quindi efficiente quando  $K_2(m)$  non è molto più



grande di  $\frac{X_0}{m}$ . Ogni punto trovato sul reticolo, si può controllare che soddisfi il corollario 2.5.2 e il lemma 2.5.4.

Facendo questa ricerca per  $69 \leq m \leq 90$ , troviamo i seguenti risultati.

**Lemma 2.9.1.** (a) Con  $69 \leq m \leq 75$  non ci sono  $m$ - cicli non banali.

(b) Con  $76 \leq m \leq 77$  gli unici  $m$ -cicli non banali, soddisfano:

$m$	$K$	$L$	$\text{diminuisce quando } X_0 \geq$
76, 77	111738283365989051	65362705664058124	$\{3.78, 3.83\} \cdot 2^{60}$
76, 77	117972833293231014	69009683580368485	$\{5.39, 5.46\} \cdot 2^{60}$
76, 77	124207383220472977	72656661496678846	$\{9.39, 9.52\} \cdot 2^{60}$
76, 77	130441933147714940	76303639412989207	$\{36.8, 37.3\} \cdot 2^{60}$
77	242180216513703991	141666345077047331	$3.47 \cdot 2^{60}$
77	254649316368187917	148960300909668053	$7.58 \cdot 2^{60}$

(c) Con  $78 \leq m \leq 90$ , gli unici  $m$ -cicli non banali, soddisfano:

$m$	$\# \text{ soluzioni}$	$K \geq$	$K \leq$	$\text{diminuisce quando } X_0 \geq$
78	9	111738283365989051	397560349370386783	$447 \cdot 2^{60}$
79	14	111738283365989051	658444215665816663	$452 \cdot 2^{60}$
80	20	111738283365989051	1049770015108961483	$458 \cdot 2^{60}$

$m$	$\# \text{ soluzioni}$	$K \geq$	$K \leq$	$m$	$\# \text{ soluzioni}$	$K \geq$	$K \leq$
81	30	$1.1173 \cdot 10^{17}$	$1.5716 \cdot 10^{18}$	86	334	$1.0550 \cdot 10^{17}$	$1.7102 \cdot 10^{19}$
82	50	$1.1173 \cdot 10^{17}$	$2.5159 \cdot 10^{18}$	87	538	$1.0550 \cdot 10^{17}$	$2.8240 \cdot 10^{19}$
83	79	$1.1173 \cdot 10^{17}$	$4.6403 \cdot 10^{18}$	88	861	$1.0550 \cdot 10^{17}$	$4.6006 \cdot 10^{19}$
84	128	$1.1173 \cdot 10^{17}$	$6.6281 \cdot 10^{18}$	89	1384	$1.0550 \cdot 10^{17}$	$7.7693 \cdot 10^{19}$
85	209	$1.1173 \cdot 10^{17}$	$1.0604 \cdot 10^{19}$	90	2220	$1.0550 \cdot 10^{17}$	$1.1442 \cdot 10^{20}$

Per  $76 \leq m \leq 77$ , diamo con ogni soluzione il minimo valore per  $X_0$  che dev'essere raggiunto per mostrare che la soluzione non corrisponde a un  $m$ -ciclo.

Per  $78 \leq m \leq 90$ , abbiamo dato per ogni  $m$ , il numero di soluzioni trovate e il minimo e il massimo per  $K$ . Per  $m \leq 80$ , diamo anche il minimo valore di  $X_0$  che dev'essere raggiunto per mostrare che le soluzioni non corrispondono a un  $m$ -ciclo.

Ora possiamo completare la dimostrazione del teorema 2.3.1

*Dimostrazione.* teorema 2.3.1(b), (c) e (d) per  $m \leq 90$ .

(b) segue subito dal teorema 2.9.1(a). I valori di (c) e il limite superiore in (d) per  $K$  seguono da 2.9.1. Anche il limite inferiore per  $K$  segue dal lemma precedente. I limiti per  $L$  seguono dal lemma precedente combinato con il lemma 2.6.1. In (c) il limite superiore per  $x_{min}$  è dato dal corollario 2.5.2.

Nella parte (d), il limite superiore per  $x_{min}$  è derivato, come nella dimostrazione sopra per la parte (d) del teorema 2.3.1, così come segue. Sia  $n$  l'indice tale che  $q_{n-1} < K \leq q_n$ . Da  $K < K_2(m) \leq K_2(90) < 1.3388 \cdot 10^{20} < 2.0563 \cdot 10^{20} < q_{43}$  abbiamo  $n \leq 43$ . Dalla frazione continua, troviamo che  $(a_n + 1)(a_{n+1} + 2) \leq 168$ . Da cui  $x_{min} < \frac{168}{\log 2} mK$ .  $\square$

## 2.10 Conclusioni

Guardando bene al valore di  $X_0$  e all'andamento con cui i calcoli procedono, si può capire che entro una ventina di anni si potrebbe arrivare a risolvere il caso  $m = 76$  e  $m = 77$ , mentre per il caso  $m = 78$  bisognerà aspettare ancora molto tempo.

Come si può osservare, sembra che le tecniche qui utilizzate non possano andare molto lontane. Per dimostrare, definitivamente, la non esistenza di  $m$ -cicli non banali, sembra che si debba utilizzare una nuova dea.

# Capitolo 3

## Generalizzazioni al problema di Collatz

Introduciamo ora alcune naturali generalizzazioni al problema di Collatz tratte da [Wir], che divideremo in due gruppi. La prima generalizzazione è definita nel seguente modo

**Definizione 3.1.** Posti  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ pari} \\ a \cdot n + b, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad (3.1)$$

Diamo subito una visione più 'aritmetica' di questo algoritmo.

**Corollario 3.0.1.** *Se  $n$  è dispari ed è soggetto a  $t$  iterazioni 'dispari' dell'algoritmo 3.1 abbiamo che*

$$\frac{a^t \cdot n + a^{t-1} \cdot b + a^{t-2}b2^{d_1} + \dots + ab2^{d_1+\dots+d_{t-2}} + b2^{d_1+\dots+d_{t-1}}}{2^{d_1+\dots+d_t}} = c$$

*Dove per com'è stato sviluppato l'algoritmo precedente  $c \in \mathbb{Z}$*

*Osservazione 9.* Considerando  $n \in \mathbb{N}$  si può osservare che alcuni algoritmi tendono a divergere, cioè la traiettoria del tipo  $(n, f(n), \dots, f^k(n), \dots)$  che ottengo iterando la funzione, da un certo  $k \in \mathbb{N}$  in poi tende a crescere sempre.

Un esempio banale di questo fatto si ha prendendo  $a = 2$  e  $b = 1$ , infatti questo algoritmo tende a calare finché  $n$  è pari e appena s'incontra un numero dispari, continua a cresce da lì in poi e questo accade per qualsiasi numero perché ho due possibilità per  $n$ :

$$\begin{cases} (1) \ n = 2^p(2 \cdot m + 1) \text{ dove } p \in \mathbb{N} \text{ e } m \in \mathbb{N} \\ (2) \ n = (2 \cdot m + 1) \text{ dove } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si nota subito che se  $n$  è come nel caso (1), le iterazioni dell'algoritmo, dopo esattamente  $p$  passi, decresce fino ad arrivare al caso (2) ch'è dispari. Ora iterando l'algoritmo,  $n$  continuerà ad aumentare per sempre, infatti  $2(2 \cdot m + 1) + 1 = 4 \cdot m + 3 \equiv 1 \pmod{2}$ , quindi avrò sempre cicli del tipo dispari, che tendono a far aumentare  $n$ .

Al contrario per  $n$  negativo, si ha che per  $n = -1$  ho un ciclo con il solo elemento  $-1$ , mentre per  $n \leq -3$  dispari l'algoritmo tende a divergere verso  $-\infty$ . Inoltre se  $n$  è una potenza di 2 allora  $-1 \cdot n$  convergerà al ciclo  $-1$ .

Banalmente si può notare che se  $n \in \mathbb{N}$  questo accade in tutti i casi in cui  $a$  sia del tipo  $2^p$  con  $p > 0$  e  $b$  sia del tipo  $2 \cdot j + 1$ , in questo modo ogni volta che l'algoritmo incontra un numero dispari, anche il successivo lo sarà e sarà maggiore del precedente, così ottengo solo successioni arbitrariamente crescenti.

### 3.1 Il caso banale $a = b = 1$

Consideriamo ora il caso  $a = b = 1$  che pur essendo molto semplice da dimostrare, può aiutarci a capire meglio alcuni casi. Si vede banalmente che se  $n$  è dispari allora  $n + 1$  è pari, ovvero avrò una successione che decresce sempre più di quello che aumenta nel caso in cui  $n$  sia dispari. E si vede facilmente che

$$\frac{n+1}{2} < n \iff n > 1,$$

si ha l'uguaglianza proprio nel caso  $n$  sia uguale a 1

Da qui si deduce che l'algoritmo converge sempre a 1, cioè preso un qualsiasi  $n \in \mathbb{N}$  si ha che dopo un numero finito di iterazioni di 3.1, arrivo al ciclo (1, 2). Ora utilizzando la formula del corollario 3.0.1 si ha che

**Teorema 3.1.1.** *Utilizzando l'algoritmo con i parametri detti in precedenza, si hanno i seguenti risultati:*

- (1) *C'è una relazione biunivoca tra i coefficienti  $d_1, \dots, d_t$  e la rappresentazione di  $n$  in base binaria.*
- (2) *Il numero di iterazioni 'pari' per un qualsiasi  $n$  è pari a  $\lceil \log_2(n) \rceil$  cioè il più piccolo intero non minore di  $n \log_2(n)$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo come prima cosa (1) e si avrà come conseguenza (2).

Considerando la scrittura del corollario 3.0.1 e sostituendo  $a = b = 1$  si ha che se  $n$  è dispari allora vale la seguente scrittura

$$\frac{n + 1 + 2^{d_1} + \dots + 2^{d_1 + \dots + d_{t-2}} + 2^{d_1 + \dots + d_{t-1}}}{2^{d_1 + \dots + d_t}} = 1$$

In quanto sappiamo che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha che dopo un numero finito di iterazioni, che supponiamo essere  $t$ , otteniamo  $c = 1$ . Inoltre per quanto detto prima si può osservare che  $d_1, \dots, d_t$  sono sicuramente  $\geq 1$ .

Detto questo con qualche semplice passaggio aritmetico abbiamo

$$n = 2^{d_1 + \dots + d_t} - (1 + 2^{d_1} + \dots + 2^{d_1 + \dots + d_{t-2}} + 2^{d_1 + \dots + d_{t-1}})$$

ora scriviamo ogni termine in base 2 e utilizziamo semplicemente gli algoritmi elementari di sottrazione e somma in base 2, nel modo seguente

$$n = (1 \underbrace{00 \dots 00}_{d_1 + \dots + d_t \text{ zeri}})_2 - ((1)_2 + (1 \underbrace{00 \dots 00}_{d_1 \text{ zeri}})_2 + \dots + (1 \underbrace{00 \dots 00}_{d_1 + \dots + d_{t-1} \text{ zeri}})_2)$$

dove  $(\cdot)_2$  indica che il numero scritto tra parentesi è in base 2.

Prima di tutto calcolo tutte le somme e ottengo il seguente numero:

$$(1 \underbrace{0 \dots 0}_{d_{t-1}-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{d_{t-2}-1} 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{d_2-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{d_1-1} 1)_2$$

ora effettuiamo la sottrazione, ricordando che in base 2 si ha che, posto  $k > l$

$$(1\underbrace{0\dots 0}_k)_2 - (1\underbrace{0\dots 0}_l)_2 = (1\underbrace{\dots 1}_k\underbrace{0\dots 0}_l)_2, \text{ allora si ha}$$

$$\mathcal{F} = (\underbrace{1\dots 1}_{d_t-1}0\underbrace{1\dots 1}_{d_{t-1}-1}0\dots 0\underbrace{1\dots 1}_{d_2-1}0\underbrace{1\dots 1}_{d_1})_2$$

Da qui si nota che data una successione di  $d_1, \dots, d_t$  abbiamo una certa rappresentazione in base 2 di un unico numero  $n$  e viceversa.

Ora diventa facile provare quanti sono i cicli pari dell'algoritmo, infatti sono pari alla lunghezza di  $n$  scritto in base 2 ovvero  $\lceil \log_2 n \rceil$ , questo perché le cifre contenute in  $\mathcal{F}$  sono esattamente  $d_t - 1 + d_{t-1} - 1 + \dots + d_2 - 1 + d_1$ , per quanto riguarda gli 1, mentre gli zeri sono  $t - 1$ , facendo la somma ottengo che il numero totale delle cifre è  $d_t + d_{t-1} + \dots + d_2 + d_1$ . Mentre il numero di zeri più uno è pari al numero di cicli 'dispari' meno uno.

□

Banalmente si può osservare che se  $a = b = 2^m$  con  $m \in \mathbb{N}$  allora ho esattamente lo stesso algoritmo precedente, solo che quando il numero è dispari, invece che avere  $i$  divisioni per 2, ne ho  $i + m$ , quindi il numero di iterazioni pari sarà quello precedete più  $m \cdot (d_t + d_{t-1} + \dots + d_2 + d_1)$ , con  $t$  numero di cicli 'dispari'.

### 3.1.1 Osservazioni generali sui numeri dispari ciclici

Effettuando vari ricerche empiriche utilizzando  $a$  e  $b$  dispari, si osserva che considerando un intervallo del tipo  $[-10^4, 10^4]$  abbiamo che i numeri dispari ciclici sono lo stesso numero se considero  $b$  oppure  $-b$ , questo per qualsiasi  $a$ . Infatti si può notare che se  $n$  è un numero ciclico con  $a, b$  allora  $-n$  sarà un numero ciclico con  $a, -b$ .

Questo fatto può essere spiegato molto bene utilizzando la formula nel corollario 3.0.1 Infatti se noi sappiamo che

$$\frac{a^t \cdot n + a^{t-1} \cdot b + a^{t-2}b2^{d_1} + \dots + ab2^{d_1+\dots+d_{t-2}} + b2^{d_1+\dots+d_{t-1}}}{2^{d_1+\dots+d_t}} = n$$

Allora posto  $-b$  al posto di  $b$  e  $-n$  al posto di  $n$  avremo

$$\frac{a^t \cdot (-n) + a^{t-1} \cdot (-b) + a^{t-2}(-b)2^{d_1} + \dots + a \cdot (-b)2^{d_1+\dots+d_{t-2}} - b \cdot 2^{d_1+\dots+d_{t-1}}}{2^{d_1+\dots+d_t}} = -n$$

Allora moltiplicando ambo i membri per  $-1$  ottengo nuovamente

$$\frac{a^t \cdot n + a^{t-1} \cdot b + a^{t-2}b2^{d_1} + \dots + ab2^{d_1+\dots+d_{t-2}} + b2^{d_1+\dots+d_{t-1}}}{2^{d_1+\dots+d_t}} = n$$

Inoltre nel caso  $a = 3$  si nota che se  $b$  è del tipo  $3^k \cdot p$  con  $p$  numero primo, si ha che i numeri ciclici dispari nel caso  $b = p$  sono, come numero, lo stesso che nel caso  $b = 3^k \cdot p$  e i numeri ciclici sono gli stessi del caso precedente, moltiplicati per  $3^k$ . Anche questo fatto può essere spigato dal corollario 3.0.1

$$\frac{3^t \cdot n + 3^{t-1} \cdot p + a^{t-2}p2^{d_1} + \dots + 3p2^{d_1+\dots+d_{t-2}} + p2^{d_1+\dots+d_{t-1}}}{2^{d_1+\dots+d_t}} = n$$

Allora sostituendo  $n$  con  $3^k \cdot n$  e  $p$  con  $3^k \cdot p$ , si nota che posso semplificare un termine  $3^k$  da entrambi i membri e riottenere la formula precedente. Inoltre si può notare che questo fatto rimane valido per qualsiasi  $a \neq \pm 1$  e  $b = a^k \cdot p$ . Si dimostra come nel caso particolare precedente.

## 3.2 Seconda generalizzazione

Introduciamo ora una nuova generalizzazione leggermente più complessa, dell'algoritmo di Collatz.

**Definizione 3.2.** Posti  $a, d \in \mathbb{N}$  con  $d > a$ .

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = \begin{cases} n/d, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{d} \\ a \cdot n + (d-a)b, & \text{se } n \equiv b \pmod{d} \end{cases} \quad (3.2)$$

Questo algoritmo è costruito in modo tale che ogni volta che viene effettuato una iterazione che aumenta  $n$ , la successiva sarà sicuramente una iterazione di divisione per  $d$ . In questo modo somiglia molto all'algoritmo di Collatz, infatti per  $d = 2$  e  $a = 3$  si ha proprio l'algoritmo di Collatz.

E' interessante notare che questo algoritmo nel caso  $a = d = 3$  diventa

$$f(n) = \begin{cases} n/3, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 3 \cdot n, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si hanno infiniti cicli di lunghezza 2 tutti del tipo  $(n, 3 \cdot n)$  con  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$

Questo si ottiene osservando che ho tre possibili casi:

- (1) Se  $n = 3 \cdot l + 1$  allora avrò  $9 \cdot l + 3$ , quindi con la successiva iterazione ottengono nuovamente  $n$ .
- (2) Se  $n = 3 \cdot k + 2$  allora avrò  $9 \cdot k + 6$ , quindi con la successiva iterazione ottengono nuovamente  $n$ .
- (3) Se  $n = 3 \cdot p$  allora ottengo  $p$  da cui se  $p$  è una potenza di 3, allora arriverò al ciclo  $(1, 3)$ , altrimenti cado in uno dei casi precedenti.

*Osservazione 10.* Si nota che scrivere questo algoritmo nello stesso modo in cui abbiamo scritto quello precedente nel corollario 3.0.1 può sembrare molto difficile, ma utilizzando la formula del corollario 3.0.1 e qualche accorgimento, ci si può riuscire.

Notiamo come prima cosa che la struttura dei due algoritmi è simile, cioè al posto del 2 ch'è presente in 3.1, ora abbiamo  $d$  e anche la parte  $(d-a)b$  prima era semplicemente  $b$ , detto questo possiamo scrivere la seguente formula

$$\frac{a^t n + a^{t-1}(d-a)b_0 + a^{t-2}((d-a)b_1)d^{d_1} + \dots + a((d-a)b_t)d^{d_1+\dots+d_{t-2}} + (d-a)b_{t-1}d^{d_1+\dots+d_{t-1}}}{d^{d_1+\dots+d_t}} = c \quad (3.3)$$

Dove abbiamo che  $b_0, \dots, b_t$  sono le equivalenze modulo  $d$  dei vari numeri contenuti nella traiettoria di  $n$ , ovviamente le congruenze precedenti sono tutte maggiori di 0.



# Capitolo 4

## Il teorema di Terras

Questo teorema riguarda il comportamento della funzione tempo di arresto e nasce da una brillante idea di R. Terras, il quale si accorse che la funzione tempo di arresto totale era molto difficile da analizzare, mentre si poteva dire molto sulla funzione tempo di arresto. Questo capitolo è tratto dal sito: <http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/node4.html> di Jeffrey C. Lagarias

**Teorema 4.0.1.** *L'insieme degli interi  $S_k = \{n : n \text{ abbia un tempo di arresto} \leq k\}$  ha una densità asintotica  $F(k)$  limitata, cioè esiste il limite*

$$F(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} |\{n : n \leq x \text{ e } \sigma(n) \leq k\}|$$

*Inoltre,  $F(k) \rightarrow 1$  per  $k \rightarrow \infty$ , così quasi tutti gli interi hanno un tempo d'arresto finito.*

L'idea dietro l'analisi di Terras sembra basare per una più profonda comprensione dell'algoritmo di Collatz. Per introdurre questa idea, riprendiamo alcune notazioni e definizioni

**Notazione 4.0.1.** *Dato un intero  $n$ , definiamo una successione di  $0-1$ , tale che  $x_i(n)$  sia valutata nel modo seguente*

$$T^i(n) \equiv x_i(n) \pmod{2}, \quad 0 \leq i < \infty, \quad (4.1)$$

dove  $T^0(n) = n$ . I risultati di  $k$  iterazioni di  $T$  sono completamente descritti dal vettore di parità

$$v_k(n) = (x_0(n), \dots, x_{k-1}(n)). \quad (4.2)$$

Dal fatto che il risultato di  $k$  iterazioni è

$$T^k(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n), \quad (4.3)$$

dove

$$\lambda_k(n) = \frac{3^{x_0(n)+\dots+x_{k-1}(n)}}{2^k} \quad (4.4)$$

e

$$\rho_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{x_{i+1}(n)+\dots+x_{k-1}(n)}}{2^{k-i}}. \quad (4.5)$$

Si può notare che  $\lambda_k$  e  $\rho_k$  sono completamente determinati dal vettore di parità  $v = v_k(n)$ . La formula 4.3 mostra che una condizione necessaria per avere  $T^k(n) < n$  è che

$$\lambda_k(n) < 1, \quad (4.6)$$

dal fatto che  $\rho_k(n)$  è non negativo.

**Definizione 4.1.** Definiamo il *coefficiente di tempo di arresto*  $\omega(n)$  come il valore  $k$  tale che 4.6 sia vera e pari a  $+\infty$  se non esiste un tale valore di  $k$ .

*Osservazione 11.* Si ha subito che

$$\omega(n) \leq \sigma(n). \quad (4.7)$$

La funzione  $\omega(n)$  gioca un ruolo molto importante nell'analisi del comportamento della funzione tempo di arresto  $\sigma(n)$ .

**Teorema 4.0.2.** La funzione  $Q_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$  è definita come

$$Q_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) 2^i$$

è periodica con periodo  $2^k$ . La funzione indotta  $\overline{Q}_k : \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$  è una permutazione e il suo ordine è una potenza di 2.

Diamo solo le linee generali della dimostrazione di questo teorema.

*Dimostrazione.* (Per induzione su  $k$ )

Usiamo come ipotesi induttive:

- (1)  $x_i(n)$  è periodica con periodo  $2^{i+1}$  per  $0 \leq i \leq k-1$ , infatti

$$x_i(n + 2^i) \equiv x_i(n) + 1 \pmod{2} \quad \text{per } 0 \leq i \leq k-1 \quad (4.8)$$

- (2)  $Q_k(n)$  è periodica con periodo  $2^k$ .

- (3)  $\lambda_k(n)$  e  $\rho_k(n)$  sono periodiche di periodo  $2^k$ .

- (4)  $\overline{Q}_k$  è una permutazione, il cui ordine divide  $2^k$ . Inoltre

$$\overline{Q}_k(n + 2^{k-1}) \equiv \overline{Q}_k(n) + 2^{k-1} \pmod{2^k}. \quad (4.9)$$

□

Vediamo ora alcuni cicli e l'ordine delle permutazioni di alcuni  $\overline{Q}_k$

$k$	$\overline{Q}_k$	ordine
1	<i>identita'</i>	1
2	<i>identita'</i>	1
3	(1, 5)	2
4	(1, 5)(2, 10)(9, 13)	2
5	(1, 21)(2, 10)(4, 20)(5, 17)(7, 23)(9, 29, 25, 13)(18, 26)	4

Il teorema precedente, ci permette di associare ogni vettore  $v = (v_0, \dots, v_{k-1}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$  di lunghezza  $k$  a una sola classe di congruenza  $S(v) \pmod{2^k}$  data da

$$S(v) = \{n : v = (x_0(n), \dots, x_{k-1}(n))\}.$$

L'intero

$$n_0(v) \equiv (\overline{Q}_k)^{-1} \left( \sum_{i=0}^{k-1} v_i 2^i \right) \pmod{2^k}$$

con  $0 \leq n_0(v) < 2^k$  il più piccolo elemento in  $S(v)$ , e  $S(v)$  è la progressione aritmetica:

$$S(v) = \{n_0(v) + 2^k i : 0 \leq i < \infty\}.$$

Ora consideriamo la relazione tra un vettore  $v$  e il tempo d'arresto per un intero  $n \in S(v)$ . Definiamo un vettore  $v = (v_0, \dots, v_{k-1})$  di lunghezza  $k$  come ammissibile se:

- (1)  $(v_0, \dots, v_{k-1}) \ln 3 < k \ln 2$ ,
- (2)  $(v_0, \dots, v_{k-1}) \ln 3 > (i+1) \ln 2$ , quando  $0 \leq i \leq k-2$ .

Notiamo che tutti i vettori ammissibili  $v$  di lunghezza  $k$  hanno

$$v_0 + \dots + v_{k-1} = [k\theta], \quad (4.10)$$

dove  $\theta = \frac{\ln 2}{\ln 3} = (\log_2 3)^{-1} \approx 0.63093$  e  $[x]$  è il più grande intero  $\leq x$ .

**Teorema 4.0.3.** (a) *L'insieme degli interi con coefficiente di tempo di arresto  $k$ , sono esattamente gli interi la cui classe di congruenza  $n \bmod 2^k$ , per la quale c'è un vettore ammissibile  $v$  di lunghezza  $k$  con  $n = n_0(v)$ .*

(b) *Sia  $n = n_0(v)$  per qualche vettore  $v$  di lunghezza  $k$ . Se  $v$  è ammissibile, allora tutti gli interi abbastanza grandi e congrui a  $n \bmod 2^k$  hanno un tempo d'arresto  $k$ . Mentre se  $v$  non è ammissibile, allora solo un numero finito di interi congrui a  $n \bmod 2^k$  hanno un tempo d'arresto  $k$ .*

*Dimostrazione.* La parte (a) segue dalla definizione di ammissibilità, infatti per la definizione si ha che

- (1)  $\lambda_k(v) < 1$ .
- (2)  $\lambda_i(v) > 1$  per  $1 \leq i \leq k-1$ .

Per provare (b), prima notiamo che se  $v$  è ammissibile di lunghezza  $k$ , allora

$$T^i(n) \geq \frac{3^{v_0+\dots+v_{i-1}}}{2^i} n \geq n \quad \text{per } 1 \leq i \leq k-1,$$

così tutti gli elementi di  $S(v)$  hanno tempo d'arresto al più  $k$ . Adesso definiamo  $\epsilon_k > 0$  come

$$\epsilon_k = 1 - \frac{3^{[k\theta]}}{2^k}, \quad (4.11)$$

dove  $\theta = (\log_2 3)^{-1}$ , e notiamo che 4.10 implica che

$$\epsilon_k = 1 - \lambda_k(v) = 1 - \frac{3^{v_0+\dots+v_{i-1}}}{2^i}$$

per tutti i vettori ammissibili  $v$ . Adesso dato  $n \in S(v)$  per un vettore ammissibile  $v$ , può essere riscritto come

$$T^k(n) = n + (\rho_k(v) - \epsilon_k n). \quad (4.12)$$

Quindi quando  $v$  è ammissibile, questi  $n$  in  $S(v)$  con

$$n > \epsilon_k^{-1} \rho_k(v) \quad (4.13)$$

hanno, in questo caso, tempo d'arresto  $k$  e  $\omega(n) = \sigma(n) = k$ . Adesso supponiamo che  $v$  non sia ammissibile, allora abbiamo due possibilità, che dipendono dal fatto che la parte iniziale  $(v_0, \dots, v_i)$  di  $v$  sia ammissibile. Nessuna parte iniziale di  $v$  è ammissibile, se e solo se

$$(v_0 + \dots + v_{i+1}) \log(3) > i \log 2 \quad \text{per } 1 \leq i \leq k-1, \quad (4.14)$$

e quando 4.14 è vera, diciamo che  $v$  è *gonfio*. Se  $v$  è gonfio,  $\lambda_k(v) > 1$  così che  $T^k(n) \geq n$  per tutti gli  $n$  in  $S(v)$ , da 4.3; così non ci sono elementi di  $S(v)$  che hanno tempo d'arresto  $k$  o minore.

Nel caso rimanente  $v$  ha una parte iniziale  $w = (v_0, \dots, v_i)$  con  $i < k-1$  ch'è ammissibile. Adesso  $S(v) \subseteq S(w)$  e tutti gli elementi abbastanza grandi di  $S(w)$  hanno tempo d'arresto  $i+1 < k$ .  $\square$

Il teorema precedente ci dice che l'insieme degli interi  $I_k$  con un certo coefficiente di tempo d'arresto  $k$  è un insieme di progressioni aritmetiche modulo  $2^k$ , il quale ha la conseguenza immediata che  $I_k$  ha la seguente densità asintotica

$$d(I_k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} |\{n : n \leq x \text{ e } n \in I_k\}|$$

da cui abbiamo

$$d(I_k) = \frac{1}{2^k} |\{v : v \text{ sia ammissibile e di lunghezza } k\}|.$$

Inoltre abbiamo che l'insieme

$$S_k = \{n : n \text{ ha tempo d'arresto } k\}$$

differisce da  $I_k$  per un insieme finito, così che  $S_k$  ha una densità asintotica ch'è la stessa che ha  $I_k$ . Di conseguenza il teorema 4.0.3 implica la prima parte del teorema 4.0.1, cioè l'insieme di tutti gli interi con tempo d'arresto al più  $k$  ha una densità asintotica  $F(k)$  data da

$$F(k) = \sum_{v \text{ ammissibile di lunghezza} \leq k} \text{peso}(v) \quad (4.15)$$

dove

$$\text{peso}(v) = 2^{\text{lunghezza}(v)}.$$

Adesso la formula 4.15 può essere usata per provare la seconda parte del 4.0.1 e infatti per provare il risultato più forte, che  $F(k)$  si avvicini a 1 esponenzialmente per  $k \rightarrow \infty$ .

**Teorema 4.0.4.** *Per tutti i  $k \geq 1$ ,*

$$1 - F(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} |\{n : n \leq x \text{ e } \sigma(n) > k\}| \leq 2^{-\nu k}, \quad (4.16)$$

dove

$$\nu = 1 - H(\theta) \approx 0.05004 \dots \quad (4.17)$$

Qui  $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$  è la funzione entropia e  $\theta = (\log_2 3)^{-1}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $C = C_1 \cup C_2$  dove

$$C_1 = \{v : v \text{ e' ammissibile e } lunghezza(v) \leq k\}.$$

$$C_2 = \{v : v \text{ e' ammissibile e } lunghezza(v) = k\}.$$

Allora  $C$  ha la proprietà che per ogni parola binaria  $w$  di lunghezza  $k$  c'è un solo  $v \in C$  con  $v$  prefisso di  $w$ . Adesso per ogni  $v$  con  $lunghezza(v) \leq k$

$$peso(v) = \sum_{lunghezza(w)=k} peso(w),$$

dove la somma è su tutti i  $w$  di lunghezza  $k$  per cui  $v$  è prefisso di  $w$ . Allora

$$\sum_{v \in C} peso(v) = \sum_{lunghezza(w)=k} peso(w) = 1.$$

Da 4.15 questo implica che

$$\sum_{v \in C_2} peso(v) = 2^{-k} |C_2| = 1 - F(k).$$

Dove  $|C_2|$  è il numero di vettori in  $C_2$ . La prima parte del teorema 4.0.1 ci dice che

$$1 - F(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} |\{n : n \leq x \text{ e } \sigma(n) > k\}|,$$

così che per provare 4.16 è sufficiente limitare  $|C_2|$  dall'alto.

Adesso la definizione 4.14 di un vettore gonfiato, implica che

$$C_2 \subseteq \left\{ v : \sum_{i=0}^{k-1} v_i > k\theta \right\},$$

così che

$$|C_2| \leq \sum_{j > k\theta} \binom{k}{j}. \quad (4.18)$$

Il membro destro di 4.18 è soltanto la coda della distribuzione binomiale. E' facile vedere che, usando la formula di Stirling, per ogni costante  $\alpha > \frac{1}{2}$  e ogni  $\epsilon > 0$  il limite

$$\sum_{j > k\alpha} \binom{k}{j} \leq k \binom{k}{[k\alpha]} \leq 2^{(H(\alpha+\epsilon)k)}$$

è vero per tutti i  $k$  sufficientemente grandi. Con un'ulteriore stima più precisa, si vede che per ogni  $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\sum_{j > k\alpha} \binom{k}{j} \leq 2^{H(\alpha)k}$$

nel quale abbiamo usato 4.18 implica 4.16. □

Il teorema 4.0.4 non può essere sostanzialmente migliorato; può solo essere provato che per ogni  $\epsilon > 0$  abbiamo

$$|C_2| \geq 2^{(H(\theta) - \epsilon)k}$$

per tutti i  $k$  sufficientemente grandi a seconda di  $\epsilon$ . Quindi per ogni  $\epsilon > 0$

$$1 - F(k) \geq 2^{-(\nu + \epsilon)k}$$

è vera per tutti i  $k$  abbastanza grandi a seconda di  $\epsilon$ .



# Appendice **A**

## A.1 Osservazioni sulla formula 3

Utilizzando (3) si nota facilmente che, se  $n = 1$  ottengo:

$$\frac{1 \cdot 3 + 1}{2^2} = 1$$

$$\frac{1 \cdot 3^2 + 3 + 2^2}{2^2} = 1$$

iterando questo ragionamento ottengo:

$$\frac{1 \cdot 3^t + 3^{t-1} + 3^{t-2} \cdot 2^2 + \dots 2^{2(t-1)}}{2^{2t}} = 1$$

ovvero

$$3^t = 2^{2t} - 2^{2(t-1)} - 3 \cdot 2^{2(t-2)} - \dots - 3^{t-1}$$

Per ogni  $t \in \mathbb{N}$ .

Utilizzando lo stesso ragionamento però partendo da  $n = -1$ , ottengo che

$$3^t = 2^t + 2^{t-1} + 3 \cdot 2^{t-2} + \dots + 2 \cdot 3^{t-2} + 3^{t-1}$$

Un'altra osservazione riguardante la formula (3) riguarda il fatto che anche quando un numero qualsiasi  $n$  arriva a 1, posso nel modo seguente continuare a iterare all'infinito e così ottengo

$$\frac{3^{t+q} \cdot n + 3^{t-1+q} + 3^{t-2+q} \cdot 2^{d_1} + \dots + 2^{d_1+\dots+d_t+2(q-1)}}{2^{d_1+\dots+d_t+2q}} = 1$$

Considerando la seguente già nota generalizzazione dell'algoritmo di Collatz:

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ pari} \\ n+1, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

e ricordando la formula

$$\frac{n+1+2^{b_1}+\dots+2^{b_1+\dots+b_{t-2}}+2^{b_1+\dots+b_{t-1}}}{2^{b_1+\dots+b_t}} = c \quad (\text{A.2})$$

con  $c = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$

Vediamo ora ch'è possibile trovare un legame tra la formula del corollario 3.0.1 per  $a = b = 1$  e  $a = 3, b = 1$ . Per fare ciò considero che anche nella (3)  $c = 1$  e scrivo le formule in questo modo:

$$F(t) = 2^{d_1+\dots+d_t} - (1 + 2^{d_1} + \dots + 2^{d_1+\dots+d_{t-2}} + 2^{d_1+\dots+d_{t-1}})$$

$$C(t) = \frac{2^{d_1+\dots+d_t} - (3^{t-1} + 3^{t-2}2^{d_1} + \dots + 2^{d_1+\dots+d_{t-2}}3 + 2^{d_1+\dots+d_{t-1}})}{3^t}$$

Inoltre definisco:

$$\phi(i) = 2 \cdot 3^{i+1} - 2^{i+2}$$

$$h(i) = 2^{i+2} - 2 \cdot 3^{i+1}$$

Da cui si vede subito che  $\phi(i) + h(i) = 0$  Allora ottengo:

$$F(t) = 3^t \cdot C(t) + \sum_{i=0}^{t-2} 3^{t-i-1} \cdot \phi(i-1) \cdot C(t-i-1) + \phi(t-2)$$

$$3^t \cdot C(t) = F(t) + \sum_{i=0}^{t-2} h(i-1) \cdot F(t-i-1) + h(t-2)$$

In questo modo si nota ch'è possibile trovare  $3^t \cdot C(t)$  come combinazione lineare di  $t$  formule del tipo  $F(i)$  e viceversa. Per dimostrare questo fatto basta semplicemente sostituire e svolgere i calcoli.

*Osservazione 12.* Da queste formule, sapendo che su  $F(t)$  si fanno molte cose, si può pensare di trovare qualche informazione per  $3^t C(t)$ , soltanto

che si dovrebbe sapere a priori che per ogni combinazione del tipo  $F(t) + \sum_{i=0}^{t-2} h(i-1) \cdot F(t-i-1) + h(t-2)$ , con certi  $d_1, \dots, d_t$ , si ottengano certi prodotti del tipo  $3^t \cdot l$ . Ma questo per ora non è possibile.

## A.2 Dimostrazione lemma di Crandall

Diamo prima di tutto alcune definizioni, utilizzando la stessa notazione usata da Crandall nel suo articolo [Cra]

**Definizione A.1.** Definisco prima di tutto l'insieme  $D^+$  come l'insieme degli interi positivi dispari e la funzione  $C : D^+ \rightarrow D^+$

$$C(m) = \frac{3m+1}{2^{e(m)}}$$

dove  $m \in D^+$  ed  $e(m)$  è scelto in modo tale che  $C(m)$  sia ancora dispari. Inoltre per  $m \in D^+$  definiamo la traiettoria di  $m$

$$T_m = \{C(m), C^2(m), \dots\}.$$

Inoltre abbiamo che l'altezza di Crandall di  $m$  è definita dalla cardinalità della traiettoria  $T_m$ , cioè

$$h(m) := |T_m| \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

**Congettura A.2.1.** Per ogni  $m \in D^+$ ,  $h(m)$  è finito.

Assumiamo che tutte le traiettorie  $T(m)$  per  $m \in D^+$ , siano limitate e assumiamo che nessun  $m > 1$  appaia nella propria traiettoria. Allora la congettura A.2.1 è vera, allora sotto queste due assunzioni, le iterate  $C(m), C^2(m), \dots, C^{\sup T_m}(m)$ , sono distinte; finché ogni iterata è minore di  $\sup T_m$ , il numero 1 deve apparire nella lista delle iterate. Non si sa se una delle due ipotesi sia vera. Dovremo mostrare che i numeri  $m > 1$  che appaiono nelle nostre traiettorie, se esistono, sono necessariamente difficili da scoprire. Più precisamente dobbiamo stabilire un limite inferiore per il

periodo di un'infinita traiettoria ciclica in termini del suo elemento più piccolo. Sia  $m = B_{b_k \dots b_1}(n) = \frac{2^{b_k} B_{b_{k-1} \dots b_1}(n) - 1}{3} = \dots = \frac{2^{b_k} \dots \frac{2^{b_1} - 1}{3} \dots - 1}{3}$  per qualche successione di interi positivi  $b_i$ .

**Definizione A.2.**

$$A_i = \sum_{j=k-i+1}^k b_j \text{ per } 1 \leq i \leq k; \quad (\text{A.3})$$

$$A_0 = 0.$$

Allora la funzione  $B$  può essere estesa per avere a seguente identità:

$$2^{A_k} n - 3^k m = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{A_j} 3^{k-1-j}. \quad (\text{A.4})$$

L'identità segue sempre dal fatto che  $n \in T_m$ , se  $n$  appare nella posizione  $k$ -esima di  $T_m$  allora poniamo  $b_j = e(C^{k-j}(m))$ , questo ci dà  $m = B_{b_k \dots b_1}(n)$  e infine abbiamo A.4. Al contrario, se A.4 è vera per qualche successione monotona di interi crescenti  $0 = A_0 < A_1 < \dots < A_k$ , allora avendo posto  $d_i = A_{k-i+1} - A_{k-1}$  ci dà  $m = B_{b_k \dots b_1}(n)$ , così dal fatto che  $C(B_{b_{k+1} \dots b_1}(n)) = B_{b_k \dots b_1}(n)$  e  $C(B_{b_1}(n)) = n$ , abbiamo  $C^k(m) = n$ , il quale implica sia  $n = 1$  sia che  $n$  appaia in  $k$ -esima posizione di  $T_m$ . In ogni caso  $n \in T_m$  e abbiamo dimostrato

**Teorema A.2.2.** *Sia  $m, n \in D^+$ . Allora  $n \in T_m$  se e solo se c'è una successione di interi*

$$0 = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_k$$

*tali che l'equazione A.4 sia vera. Inoltre, se esiste una tale successione  $\{A_i\}$ , allora  $n = 1$  o il  $k$ -esimo elemento di  $T_m$  è  $n$ .*

**Corollario A.2.3.** *Se  $1 < m \in D^+$ ,  $m \in T_m$  ed il periodo di  $T_m$  è  $k$ , allora esiste una successione di interi  $0 = A_0 < A_1 < \dots < A_k$  tali che*

$$m(2^{A_k} - 3^k) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{A_j} 3^{k-1-j}. \quad (\text{A.5})$$

*Al contrario se l'equazione A.5 è vera per una tale successione monotona, allora  $m \in T_m$  e  $m = 1$  oppure  $m$  è il  $k$ -esimo elemento di  $T_m$ .*

E' interessante vedere che se  $m$  appare nella sua traiettoria, allora nell'equazione A.5 il fattore  $2^{A_k} - 3^k$  deve dividere il membro destro. Se la congettura A.2.1 fosse vera, allora l'equazione diofantea A.5, non deve avere soluzioni per  $m > 1$ , sotto il vincolo della monotonicità sugli  $\{A_i\}$ . Sappiamo che l'equazione  $2^x - 3^y = z$  ha solo un numero finito di soluzioni per  $x, y$  interi, per ogni valore di  $z$  e infatti, possiamo avere al massimo una soluzione per  $z$  abbastanza grande. Ma risultati netti per speciali  $z$  primi, possono essere ottenuti sotto l'assunzione che la congettura A.2.1 sia vera.

Da questo, abbiamo che l'impossibilità di trovare soluzioni all'equazione diofantea A.5, può essere mostrata dall'implicazione che se 2 è una radice primitiva di un primo  $p$ , ogni soluzione per  $x, y$  interi di  $2^x - 3^y = p$  deve avere  $y < \frac{p}{(t-1)}$  dove  $t = \log_2 3$ .

E' interessante che se posso trovare una coppia di interi  $(a, b)$  tali che  $b > 1$  e

$$0 < 2^a - 3^b \text{ divide } 2^{a-b} - 1,$$

allora la congettura precedente è falsa. Anzi, se scriviamo

$$2^{a-b} - 1 = d(2^a - 3^b),$$

allora il numero  $m = 2^b d - 1$  soddisfa:

$$m(2^a - 3^b) = 3^b - 2^b = \sum_{j=0}^{b-1} 2^j 3^{b-j-1},$$

e dal fatto che  $m > 1$ , il corollario A.2.3 implica che  $h(m)$  è infinita.

Il corollario A.2.3 mostra che se la congettura è vera, allora le potenze di due e tre tendono a essere una scarsa approssimazione l'una dell'altra. Il numero  $t = \log_2 3$  dev'essere quindi, difficile da approssimare con numeri razionali. Per il momento mostriamo i primi 50 elementi della frazione continua  $t =$

$\log_2 3$ .

$$\begin{aligned}
 t = & [1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, 3, 1, 1, 15, 1, 9, 2, 5, 7, 1, 1, 4, 8, 1, 11, \\
 & 1, 20, 2, 1, 10, 1, 4, 1, 1, 11, 1, 37, 4, 55, 1, 1, 49, \dots] \\
 & = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{49}].
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Le convergenze di questa frazione sono determinate per ricorrenza

$$\begin{aligned}
 p_0 &= a_0; \quad p_{-1} = 1; \\
 q_0 &= 1; \quad q_{-1} = 0; \\
 p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}^+; \\
 q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}^+.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Il rapporto  $\frac{p_n}{q_n}$  è detto l' $n$ -esima convergenza di  $t$ .

I prossimi lemmi derivano dalla teoria dell'approssimazione razionale.

**Lemma A.2.4.** *Sia  $\frac{p_n}{q_n}$  l' $n$ -esima convergenza di  $t = \log_2 3$ . Allora per ogni coppia di interi  $(x, y)$  con  $y < q_n$ .*

$$|p_n - q_n t| < |x - yt|.$$

**Lemma A.2.5.** *Dato  $\frac{p_n}{q_n}$  l' $n$ -esima convergenza di  $t$ ,*

$$|p_n - q_n t| > (q_n + q_{n+1})^{-1}.$$

**Lemma A.2.6.** *Dato  $\frac{p_n}{q_n}$  l' $n$ -esima convergenza di  $t$ , con  $y < q_m$ . Allora*

$$|2^x - 3^y| > 3^y \log 2 |p_m - q_m t|.$$

*Dimostrazione.*

$$|2^x - 3^y| = 3^y |\exp(x \log 2 - y \log 3) - 1| > 3^y \log 2 |x - yt|.$$

Quando  $y < q_m$ , il lemma A.2.4, implica la disuguaglianza desiderata.  $\square$

Adesso spostiamo la nostra attenzione sui numeri  $m > 1$  per i quali  $m \in T_m$ . E' chiaro che ogni traiettoria ciclica infinita, contiene un tale  $m$ .

**Lemma A.2.7.** *Se  $1 < m = \inf T_m$ , allora dati gli  $A_j$ , definiti come nell'equazione A.3,*

$$2^{A_j} \leq \left(3 + \frac{1}{m}\right)^j.$$

*Dimostrazione.* Dal fatto che  $C(x) = \frac{(3x+1)}{2^{e(x)}}$ , deduciamo che, dato che  $m \leq C^j(m)$  per ogni  $j$ , che

$$C^{j+1}(m) \leq C^j(m) \frac{(3 + \frac{1}{m})}{2^{e(C^j(m))}}.$$

Ma questo implica

$$m \leq C^j(m) \leq \frac{m (3 + \frac{1}{m})^j}{2^{A_j}}$$

che da' la disuguaglianza cercata.  $\square$

**Lemma A.2.8.** *Sia  $1 < m = \inf T_m$  e sia  $k$  il periodo della traiettoria  $T_m$ . Allora*

$$m < \frac{k(3 + \frac{1}{m})^{k-1}}{2^{A_k} - 3^k}.$$

*Dimostrazione.* Dal corollario A.2.3 e dal lemma A.2.7 abbiamo che

$$m(2^{A_k} - 3^k) < \sum_{j=0}^{k-1} \left(3 + \frac{1}{m}\right)^{k-1}$$

e la disuguaglianza desiderata, segue dal calcolo diretto della somma.  $\square$

Questi lemmi ci consentono di stabilire una connessione tra la misura del periodo di una possibile traiettoria ciclica e la frazione continua di  $t = \log_2 3$ .

Finalmente possiamo definire e dimostrare il teorema di Crandall.

**Teorema A.2.9.** *Siano  $\frac{p_n}{q_n}$  le convergenze di  $t$ . Sia  $1 < m = \inf T_m$  e sia  $k$  il periodo di  $T_m$ . Allora per  $n \geq 4$ :*

$$k > \min \left( q_n, \frac{2m}{q_n + q_{n+1}} \right).$$

*Dimostrazione.* Se  $k > q_n$ , il risultato è banale, così consideriamo il caso in cui  $k \leq q_n$ . Allora dai lemmi A.2.6 e A.2.8 abbiamo

$$m < \frac{k \left(3 + \frac{1}{m}\right)^{k-1}}{3^k \log 2 |p_n - q_n t|},$$

da cui, utilizzando la disuguaglianza generalizzata di bernoulli, ottengo che

$$k > m(\log 2) \left(3 + \frac{1}{m}\right) |p_n - q_n t| \left(1 - \frac{k}{3m}\right).$$

Ma  $n \geq 4$  implica che  $q_n + q_{n+1} > 20$  usando l'equazione A.6. Da cui, se  $k \geq \frac{m}{10}$ , il risultato del teorema è banalmente vero. Così noi assumiamo che  $k < \frac{m}{10}$ . Ma questo implica  $(1 - \frac{k}{3m}) > \frac{29}{30}$  e dal lemma A.2.5,

$$k > \frac{(3m+1) \log 2}{q_n + q_{n+1}} \left(\frac{29}{30}\right) > \frac{2m}{q_n + q_{n+1}}.$$

□

### A.3 Una 'fattorizzazione' dovuta all'algoritmo di Collatz

Consideriamo la formula 3 e poniamo che  $c$  sia uguale a  $n$  allora posso pensare di raccogliere nel seguente modo:

$$3^{t-1}n + 3^{t-2} + \dots + 2^{d_1+\dots+d_{t-2}} = 2^{d_1+\dots+d_{t-1}} \frac{(2^{d_t} \cdot n - 1)}{3}$$

e chiamo  $a_t = \frac{(2^{d_t} \cdot n - 1)}{3}$ , a questo punto itero questo procedimento fino ad ottenere

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{(2^{d_t} \cdot n - 1)}{3} \\ a_{t-1} &= \frac{(2^{d_{t-1}} \cdot a_t - 1)}{3} \\ &\vdots \\ a_1 &= \frac{(2^{d_1} \cdot a_2 - 1)}{3} \end{aligned}$$



Dove abbiamo che  $a_1 = n$ , inoltre possiamo riscrivere tutto nei termini seguenti:

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot a_t + 1}{n} &= 2^{d_t} \\ \frac{3 \cdot a_{t-1} + 1}{a_t} &= 2^{d_{t-1}} \\ &\vdots \\ \frac{3 \cdot a_1 + 1}{a_2} &= 2^{d_1}\end{aligned}$$

Ora possiamo scrivere

$$\left(\frac{3 \cdot a_t + 1}{n}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot a_{t-1} + 1}{a_t}\right) \dots \left(\frac{3 \cdot a_2 + 1}{a_3}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot a_1 + 1}{a_2}\right) = 2^{d_1} \cdot 2^{d_2} \dots 2^{d_t}$$

Da cui ricordando che  $a_1 = n$ , ottengo

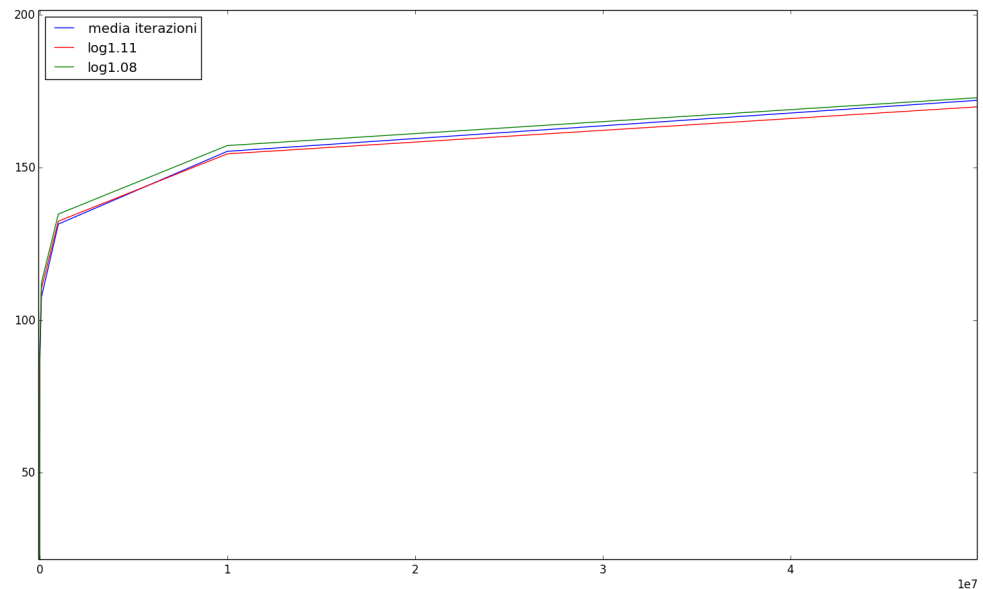
$$\left(\frac{3 \cdot a_t + 1}{n}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot a_{t-1} + 1}{a_t}\right) \dots \left(\frac{3 \cdot a_2 + 1}{a_3}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot n + 1}{a_2}\right) = 2^{d_1} \cdot 2^{d_2} \dots 2^{d_t} \quad (\text{A.8})$$

Mentre nel caso che  $n$  non sia ciclico ottengo:

$$(3 \cdot a_t + 1) \cdot \left(\frac{3 \cdot a_{t-1} + 1}{a_t}\right) \dots \left(\frac{3 \cdot a_2 + 1}{a_3}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot n + 1}{a_2}\right) = 2^{d_1} \cdot 2^{d_2} \dots 2^{d_t} \quad (\text{A.9})$$

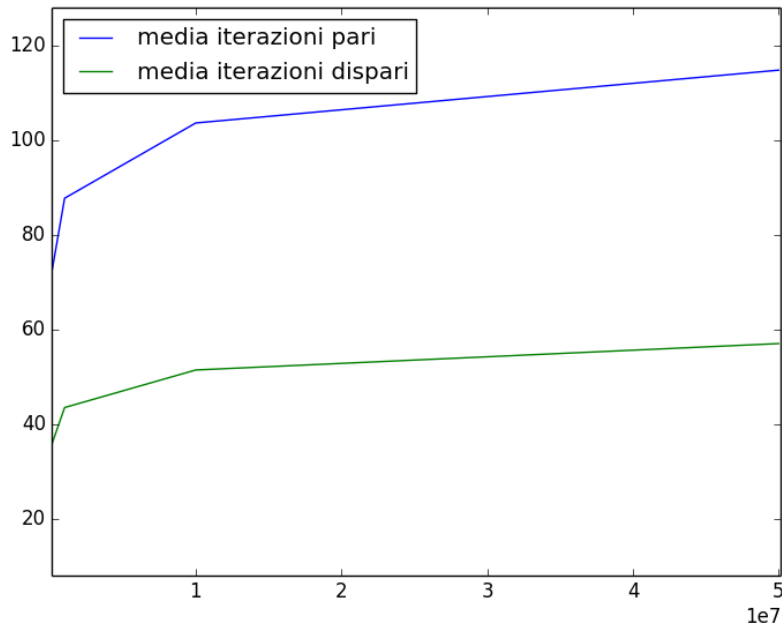
## A.4 Test empirici sulle iterazioni dell'algoritmo

Nel primo test ho considerato la media del numero di iterazioni compiute a partire da  $n$  per arrivare a 1, nel mio caso il massimo di  $n$  è  $5 \cdot 10^7$  ed il minimo è 1, la media è stata calcolata sommando il numero di iterazioni svolte per ogni numero fino ad  $n$  e dividendolo per  $n$ , vediamo cio' che si ottiene graficamente da questi dati:



**Figura A.1:** Nelle ascisse e' rappresentato il numero fino a cui ho calcolato la media di iterazioni e nelle ordinate il numero medio di iterazioni

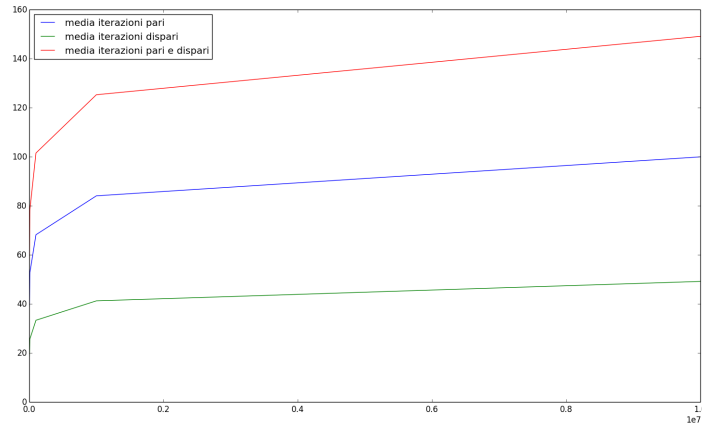
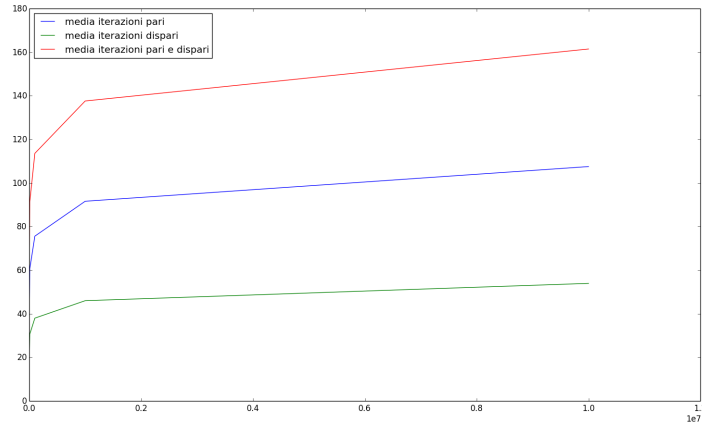
Da questo grafico si nota come l'andamento della media delle iterazioni sia compreso tra il logaritmo in base 1.11 di  $n$  e il logaritmo in base 1.08 di  $n$ . Inoltre osservando la media delle iterazioni pari e la media delle iterazioni dispari, noto che il numero di iterazioni medie pari, tende ad essere sempre il doppio di quelle dispari, vediamo ora il loro andamento nel seguente grafico:



**Figura A.2:** Nelle ascisse e' rappresentato il numero fino a cui ho calcolato la media di iterazioni e nelle ordinate il numero medio di iterazioni

Da questi due grafici si nota che l'andamento medio delle iterazioni, sembra essere molto limitato all'aumentare dei numeri che sto' considerando, quindi si nota come sia difficile credere ch'esista un certo  $n$  per il quale l'algoritmo tenda ad aumentare sempre più.

Inoltre possiamo chiederci cosa cambia svolgendo il test precedente prima sui numeri dispari e sui numeri pari, ottengo i seguenti due grafici:



Come nelle figure precedenti, nelle ascisse è rappresentato il numero fino a cui ho calcolato la media di iterazioni e nelle ordinate il numero medio di iterazioni. Nel primo sono stati considerati solo i numeri dispari, mentre nel secondo solo quelli pari, però si nota che nei due grafici non ci siano differenze sensibili.

Inoltre possiamo considerare tutti i numeri in ordine crescente fino ad un certo  $n$  e iterare su ognuno di essi l'algoritmo di Collatz in modo tale da scoprire, lungo le varie iterazioni, quanti numeri trovo che siano maggiori del mio  $n$  e quale sia il più grande numero che ho trovato lungo tutte queste iterazioni. I risultati che ho trovato sono rappresentati in maniera esemplificativa dalla

seguente tabella:

$n$	numero piu' alto	numeri piu' grandi di $n$
1	4	2
10	52	12
100	9232	151
1000	250504	1228
10000	27114424	11664
100000	1570824736	117212

Da qui capiamo che per quanto avanziamo con gli  $n$ , troviamo sempre più numeri che sono più grandi di  $n$  ed il loro numero è maggiore di  $n$ . Inoltre analizzando nel dettaglio tutti i numeri 'utili' cioè che lungo le loro iterazioni trovano almeno un numero che non è già stati trovati in precedenza, osservo che i numeri 'utili' e pari incontrano solo se stessi come numero che non è stato trovato in precedenza, inoltre sia i numeri multipli di 3 che quelli che possono essere scritti in base 4 come una successione finita di 1, sono sempre dei numeri 'utili'.

Inoltre si capisce immediatamente che tra i numeri che possiamo definire 'inutili' ci sono tutte le potenze di 2. Altre ricerche su quest'ultima parte possono rendere più rapida la ricerca di cicli non banali, infatti si eviterebbe di iterare l'algoritmo di Collatz con numeri che l'algoritmo ha già controllato.

## A.5 Com'è fatto un ciclo positivo diverso da quello banale

Considerando l'equazione 3 si nota che sicuramente  $3^t n - 2^{d_1 + \dots + d_t} n \leq 0$ , se  $n \geq 0$ , inoltre se considero i casi intermedi delle formule precedenti (vale anche nel caso di  $n$  non ciclico) mi accorgo che se dopo  $l$  cicli, con  $l \leq t$ , ottengo un certo numero  $k$  allora avrò  $3^l n - 2^{d_1 + \dots + d_l} k \leq 0$  Allora avrò:

$$\log_2(n) - \log_2(k) \leq d_1 + \dots + d_l - \log_2(3)l$$

Ora voglio ottenere una minorazione di  $\log_2(n) - \log_2(k)$  per fare considero il caso di una sola iterazione e noto che

$$\log_2(n) - \log_2\left(\frac{3n+1}{2^{d_1}}\right) = \log_2\left(\frac{n \cdot 2^{d_1}}{3n+1}\right)$$

Ma posso notare che

$$\log_2\left(\frac{n}{3n+1}\right)$$

è una funzione monotona crescente per  $n \geq 0$  da cui mi accorgo che per i nostri fini posso considerare  $n \geq 1$  e  $n \rightarrow \infty$ , così ottengo che

$$d_1 - 2 \leq \log_2\left(\frac{n \cdot 2^{d_1}}{3n+1}\right) < -\log_2(3) + d_1$$

Quindi posso chiamare  $P = \frac{3n+1}{2^{d_1}}$  e posso utilizzare di nuovo la disuguaglianza per ottenere

$$d_2 - 2 \leq \log_2\left(\frac{P \cdot 2^{d_2}}{3P+1}\right) < -\log_2(3) + d_2$$

Iterando questo meccanismo finché non arrivo a  $k = n$  o  $k = 1$ , ora sommando le disuguaglianze e supponendo che impieghi  $t$  iterazioni a per avere  $k = 1$  o  $k = n$ , quindi ottengo

$$-2t + (d_1 + d_2 + \dots + d_t) \leq \log_2(n) - \log_2(k) < -\log_2(3)t + (d_1 + d_2 + \dots + d_t)$$

Ma se suppongo che  $k = n$ , allora ottengo

$$-2t + (d_1 + d_2 + \dots + d_t) \leq 0 < -\log_2(3)t + (d_1 + d_2 + \dots + d_t)$$

$$-2t \leq -(d_1 + d_2 + \dots + d_t) < -\log_2(3)t$$

$$2t \geq d_1 + d_2 + \dots + d_t > \log_2(3)t$$

Mentre nell'altro caso ottengo semplicemente

$$-2t + (d_1 + d_2 + \dots + d_t) \leq \log_2(n) < -\log_2(3)t + (d_1 + d_2 + \dots + d_t)$$

$$-2t \leq \log_2(n) - (d_1 + d_2 + \dots + d_t) < -\log_2(3)t$$

$$2t \geq -\log_2(n) + (d_1 + d_2 + \dots + d_t) > \log_2(3)t$$

Ora consideriamo all'interno di un ciclo il numero dispari più grande  $N$  e il numero dispari più piccolo  $n$ , nel primo caso ho (utilizzando le formule precedenti)

$$2 - d_1 \geq \log_2(k_1) - \log_2(N) > \log_2(3) - d_1 \quad (\text{A.10})$$

dove  $k_1$  è il numero dispari ottenuto dopo una iterazione dispari e  $d_1$  iterazioni pari; a questo punto sappiamo che  $-\log_2(N) + \log_2(k_1) < 0$  perché ho preso  $N \geq k_1$  allora ho che  $d_1 \geq \log_2(3)$ , inoltre continuando questo ragionamento per

$$2 \cdot 2 - (d_1 + d_2) \geq \log_2(k_2) - \log_2(N) > \log_2(3) \cdot 2 - (d_1 + d_2)$$

E anche in questo caso sapendo che  $\log_2(k_2) - \log_2(N) < 0$  ottengo che  $d_1 + d_2 \geq \log_2(3) \cdot 2$ . Iterando questo ragionamento arrivo al passo  $(t-1)$ -esimo dove ottengo:

$$2(t-1) - (d_1 + \dots + d_{t-1}) \geq \log_2(k_{t-1}) - \log_2(N) \geq \log_2(3) \cdot (t-1) - (d_1 + \dots + d_{t-1})$$

E con il ragionamento precedente ottengo  $d_1 + \dots + d_{t-1} \geq \log_2(3)(t-1)$ .

Ma utilizzando lo stesso ragionamento solo sull'ultimo passo ho che:

$$2 - d_t \geq \log_2(N) - \log_2(k_{t-1}) > \log_2(3) - d_t$$

Dove per la ciclicità ho considerato  $k_t = N$  allora ho che  $2(t) \geq d_1 + \dots + d_t > \log_2(3)t$ . Ma per quanto detto in precedenza  $\log_2(N) - \log_2(k_{t-1}) > 0$  allora ho che  $1 \leq d_t \leq 2$ , ma banalmente si osserva che nel caso di  $d_t = 2$ , a partire da  $k_{t-1}$ , trovo sempre un numero ch'è minore di  $k_{t-1}$  e quindi per ottenerne uno maggiore devo avere  $d_t = 1$ . La condizione  $d_t = 2$ , vale solo nel caso in cui  $N = 1$  e io abbia un 1-ciclo. Mentre se considero  $n$  ho che:

$$2 - b_1 \geq \log_2(g_1) - \log_2(n) > \log_2(3) - b_1$$

quindi ho che  $\log_2(g_1) - \log_2(n) > 0$  quindi ho che  $b_1 \leq 2$  ma siccome  $g_1 > n$  ho che  $b_1 = 1$ , come precedentemente il caso  $d_t = 2$  si ha solo nel caso in cui

$n = g_1$  ma così avrei un 1-ciclo e per dimostrazioni precedenti si ha solo nel caso di  $n = 1$ . Mentre continuando questo ragionamento si ha che

$$2 \cdot 2 - (b_1 + b_2) \geq \log_2(g_2) - \log_2(n) > \log_2(3) \cdot 2 - (b_1 + b_2)$$

quindi per le ipotesi fatte ottengo che  $b_1 + b_2 \leq 4$ . Iterando il ragionamento ho che  $b_1 + \dots + b_t \leq 2(t)$ . Ma sapendo che

$$2 - b_t \geq \log_2(n) - \log_2(g_{t-1}) > \log_2(3) - b_t$$

si nota che  $b_t \geq 2$ . Quindi riepilogando quello che so, si può riassumere nei seguenti fatti:

$N$	$n$
$d_1 \geq \log_2(3)$	$b_1 = 1$
$d_1 + d_2 \geq \log_2(3) \cdot 2$	$b_1 + b_2 \leq 4$
$\vdots$	$\vdots$
$d_1 + \dots + d_t \geq \log_2(3)t$	$b_1 + \dots + b_t \leq 2t$
$d_t = 1$	$b_t \geq 2$

Si nota che posso togliere l'uguaglianza da ogni disuguaglianza se suppongo che  $n > 1$ , inoltre posso notare che se considero  $n$ , questo sarà sicuramente del tipo  $4k+3$ , siccome dopo la prima iterazione devo avere una sola divisione per 2, mentre  $N$  sarà del tipo  $4k+1$ . Si può notare che nel caso in cui consideri  $n$ , posso sostituire il 2 nelle disuguaglianze, con  $\log_2\left(\frac{3n+1}{n}\right)$  e nel caso  $N$  posso sostituire  $\log_2\left(\frac{3N+1}{N}\right)$  al posto di  $\log_2(3)$ . Inoltre guardando l'ultima disuguaglianza posso notare che per avere qualche possibilità di trovare un elemento ciclico, devo almeno avere un intervallo  $[\log_2(3)t, \log_2\left(\frac{3n+1}{n}\right)t]$  in cui ci sia un numero naturale, siccome i coefficienti  $d_1, \dots, d_t$  sono naturali e la loro somma è pari alla somma di  $b_1, \dots, b_t$ ; al variare di  $n$  ottengo i seguenti risultati:



$n$	intervallo	t
2	[4.754887502163469, 5.422064766172813]	3
6	[7.924812503605781, 8.314825063612147]	5
32	[26.94436251225966, 27.198518317181172]	17
147	[45.96391252091353, 46.05867622209695]	29
387	[64.9834625295674, 65.03438848766487]	41
1193	[148.9864750677887, 149.02436117890073]	94
3343	[232.98948760601, 233.01063284467455]	147
6725	[316.99250014423126, 317.0068015993742]	200
12825	[400.99551268245256, 401.00499928679466]	253
27114	[484.99852522067386, 485.00395245345516]	306
99781	[1538.9985882002427, 1539.003267964075]	971
330750	[2592.9986511798115, 2593.0010298624998]	1636
583288	[3646.9987141593806, 3647.000611244148]	2301
860564	[4700.99877713895, 4701.0004345917605]	2966
1166400	[5754.998840118518, 5755.000337153539]	3631
1505449	[6808.998903098088, 6809.000275405664]	4296
1883432	[7862.998966077656, 7863.000232774032]	4961
2307463	[8916.999029057226, 8917.000201571758]	5626
2786502	[9970.999092036795, 9971.000177746158]	6291
3331998	[11024.999155016363, 11025.000158957164]	6956
3958809	[12078.999217995932, 12079.000143760763]	7621
4686582	[13132.9992809755, 13133.000131216371]	8286
5541847	[14186.99934395507, 14187.000120685458]	8951
6561321	[15240.99940693464, 15241.000111719299]	9616
7797317	[16294.999469914208, 16295.000103993314]	10281
9327011	[17348.999532893777, 17349.00009726678]	10946
11269200	[18402.999595873345, 18403.000091357553]	11611
13816735	[19456.999658852914, 19457.000086125205]	12276
17304876	[20510.999721832482, 20511.000081459755]	12941
22372510	[21564.99978481205, 21565.000077273777]	13606
30406457	[22618.999847791623, 22619.00007349698]	14271
45088848	[23672.999910771192, 23673.00007007217]	14936
80497518	[24726.99997375076, 24727.00006695233]	15601
285817612	[75234.99998423185, 75235.00006409844]	47468

La ricerca è stata effettuata con un codice in python, e gli  $n$  sono scelti in modo tale da essere i più piccoli tali che ci sia una variazione di  $t$ , inoltre facendo questa ricerca con  $n = 1,3 \cdot 10^{18}$  ottengo che  $t \geq 6586818670$  e l'intervallo è  $[10439860590.99999999999854, 10439860591.0000000002422]$ . Questa ricerca è utile perché trova il più piccolo  $t$  associato a un certo  $n$ , inoltre anche il valore intero contenuto nell'intervallo equivale al numero di iterazioni 'pari' associate a questo numero ciclico  $n$ . La ricerca è stata effettuata partendo dalla conoscenza di  $n$ , in quanto l'algoritmo di Collatz è stato provato per numeri superiori a  $5 \cdot 2^{60} \approx 5 \cdot 10^{18}$ . Inoltre questo  $t$  vale fino a  $n = 2,15 \cdot 10^{20}$ , già per  $n = 2,2 \cdot 10^{20}$  devo ricalcolare  $t$  e l'intervallo, i quali saranno maggiori di quelli precedenti. Il codice utilizzato è il seguente:

```
from mpmath import * #libreria python per l'utilizzo di una precisione
# arbitraria nell'aritmetica floating-point
mp.dps=25 # imposta la precisione a 25 cifre
def finaltest():
    kk=0
    b=0
    ppp=0
    jj =130*10**16 #pongo un certo numero n
    ttt=log(fdiv(jj,(3*jj+1)),2) #operazioni della libreria mpmath
    kkk1=log(3,2)
    for i in range(ppp,10**10+1): #calcolo il t a partire da 0 a un
# massimo posto in questo caso a 10^{10}
        p=fmul(kkk1,i)
        k=-fmul(ttt,i)
        if (int(p)!=int(k)): #controlla che la parte intera sia diversa
            if i>kk:
                print(jj,p,k,i)
            break
```

# Bibliografia

- [1] [AL1] Applegate, D., e Lagarias, J.C., *Density Bounds for the  $3x + 1$  Problem I. Tree – Search Method*, Math. Comp. 65 (1995), 411-426.
- [2] [AL2] Applegate, D., e Lagarias, J.C., *Density Bounds for the  $3x + 1$  Problem II Krasikov Inequalities*, Math. Comp. 65 (1995), 427-438.
- [3] [AL3] Applegate, D., e Lagarias, J.C., *On the Distribution of  $3x + 1$  Trees*, Experimental Math. 4 (1995), 193-209.
- [4] [Ba] Baker, A., *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers IV*, Mathematika 15 (1968), 204-216.
- [5] [Ber] Berndt, B.C., *Ramanujan's Notebooks, Part II*, Springer, New York, 1989.
- [6] [Br] Brox, T., *Collatz cycles with few descents*, Acta Arithmetica 92 (2000), 181-188.
- [7] [BS] Böhm, C., e Sontacchi, G., *On the existence of cycles of given length in integer sequences like  $x_{n+1} = x_n/2$  if  $x_n$  even, and  $x_{n+1} = 3x_n + 1$  otherwise*, Atti Accad. Naz. Lincei, VIII Ser. Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. LXIV (1978), 260-264.

- [8] [Col1] Collatz, L., *Verzweigungsdiagramme und Hypergraphen*, International Series for Numerical Mathematics, vol. 38, Birkhäuser, 1977.
- [9] [Col2] Collatz, L., *About the motivation of the  $(3n + 1) -$  problem*, J. Qufu Norm. Univ., Nat. Sci. 3 (1986), 9 – 11 (cinese)
- [10] [Con] Conway, J.H., *Unpredictable Iterations*, Proc. 1972 Number Theory Conf. University of Colorado, Boulder, Colorado (1972), 49-52.
- [11] [Cra] Crandall, R.E., *On the ' $3x+1$ ' Problem*, Math. Comp. 32 (October 1978), 1281-1292.
- [12] [Eve] Everett, C.J., *Iteration of the Number – Theoretic Function  $f(2n) = n, f(2n + 1) = 3n + 2$* , Adv. Math. 25 (1977), 42-45.
- [13] [FMMT] Feix, M.R., Muriel, A., Merlini, D., e Tartini, R., *The  $(3x+1)/2$  Problem : A Statistical Approach*, in: Stochastic Processes, Physics and Geometry II, Locarno 1991 (Eds. S. Albeverio, U. Cattaneo, D. Merlini) World Scientific (1995) 289-300.
- [14] [Krs] Krasikov, I., *How many numbers satisfy the  $3x + 1$  conjecture?*, Int. J. Math. Math. Sci. 12 (1989), 791-796.
- [15] [Lag1] Lagarias, J.C., *The  $3x+1$  Problem and its Generalizations*, Am. Math. Mon. 92 (1985), 1-23.
- [16] [Lag2] Lagarias, J.C., *The set of rational cycles for the  $3x+1$  problem*, Acta Arith. LVI (1991), 33-53.
- [17] [Lag3] Lagarias, J.C.,  *$3x + 1$  Problem Annotated Bibliography*, september 22, 1997.
- [18] [LaW] Lagarias, J.C., e Weiss, A., *The  $3x+1$  Problem : Two Stochastic Models*, Ann. Appl. Probab. 2 (1992), 229-261.

- 
- [19] [LMN] Laurent, M., Mignotte, M., e Nesterenko, Y., *Formes linaires en deux logarithmes et dterminants d'interpolation*, J. Number Th.55 (1995) 285-321.
- [20] [Ma] Matveev, E.M., *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebric numbers*, Part I: Izvestia: Mathematics (1998), v.62, no. 4, pp.723-772; Part II: Izvestia: Mathematics (2000), v.64, no.6, pp.125-180.
- [21] [Ne] Nesterenko, Y., *Linear Forms in Logarithms of Rational Numbers*, in: F. Amoroso e U. Zannier(eds.), Springer Lecture Notes in Mathematics Vol. 1819, 2003, pp.53-106.
- [22] [OS] Oliveira, T., Silva, *Computational verification of the  $3x + 1$  conjecture*,.
- [23] [Rh] Rhin, G., *Approximants de Pad et mesures effectives d'irrationalit*, Progress in Mathematics 71 (1987), 155-164.
- [24] [Si] Simons, J.L., *On the nonexistence of  $2 - cycles$  for the  $3x + 1$  problem*, Mathematics of computation 74 (2005), 1565-1572.
- [25] [Ste1] Steiner, R.P., *A Theorem on the Syracuse Problem*, Proc. 7th Manitoba Conf. Numerical Mathematics and Computing 1977 Winnipeg (1978), 553-559.
- [26] [Ste2] Steiner, R.P., *On the ' $Qx + 1$ ' Problem*, Q odd, Fibonacci Q. 19 (1981), 285-288.
- [27] [Ste3] Steiner, R.P., *On the ' $Qx + 1$ ' Problem*, Q odd, II, Fibonacci Q. 19 (1981), 293-296.
- [28] [Ter1] Terras, R., *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. XXX (1976), 241-252.

- 
- [29] [dW] de Weger, B.M.M, *Algorithms for Diophantine Equations*, CWI Tract 65, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, (1989).
- [30] [Wir] Wirsching, G.J., *The Dynamical System Generated by the  $3n+1$  Function*, Springer (1998)
- [31] [SiWe] Simons, J.,e de Weger, B., *Theoretical and computational bounds for  $m$  – cycles of the  $3n + 1$  problem*, version 1.43, July 31, (2007)
- [32] Jeffrey C. Lagarias <http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/node4.html>
- [33] Terry Tao <http://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/the-collatz-conjecture-littlewood-offord-theory-and-powers-of-2-and-3/>